



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



Metoda elementów skończonych (MES2)

Wykład 3. Przepływ ciepła i naprężenia cieplne

03.2026L

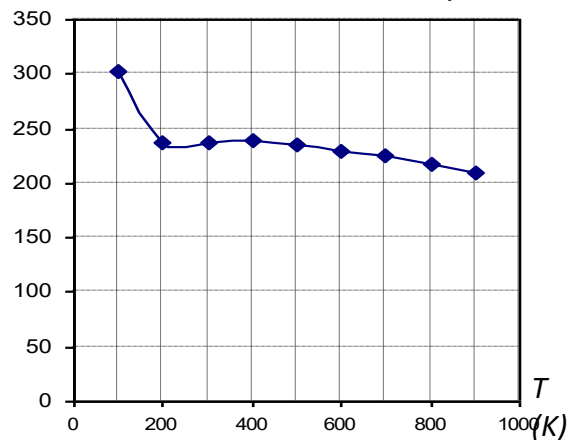
Właściwości termo-mechaniczne w zależności od temperatury

Temperatura może wpływać na wytrzymałość konstrukcji poprzez:

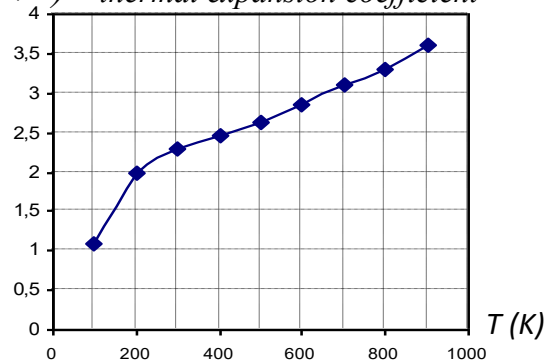
- efekt rozszerzalności cieplnej (naprężenia cieplne)
- wpływ temperatury na właściwości mechaniczne materiałów

Właściwości termo-mechaniczne aluminium (właściwości w funkcji temperatury K)

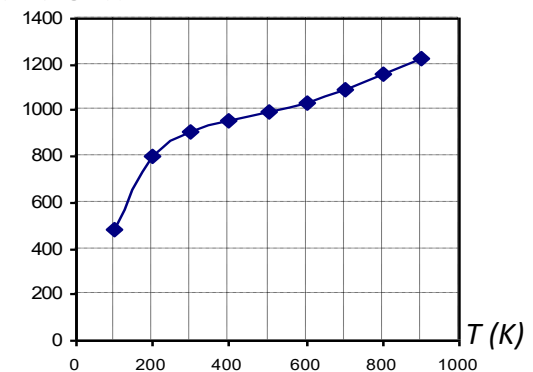
λ (W/(mK)) thermal conductivity



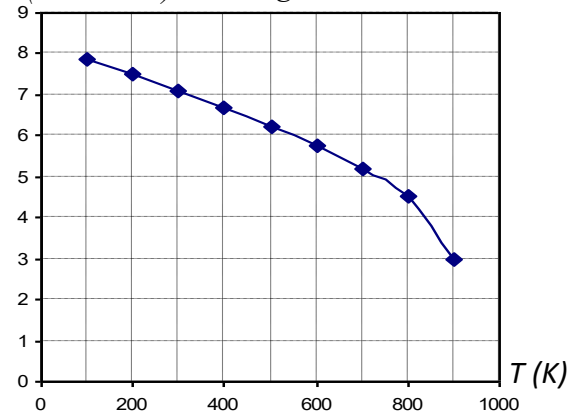
α (1/K) thermal expansion coefficient



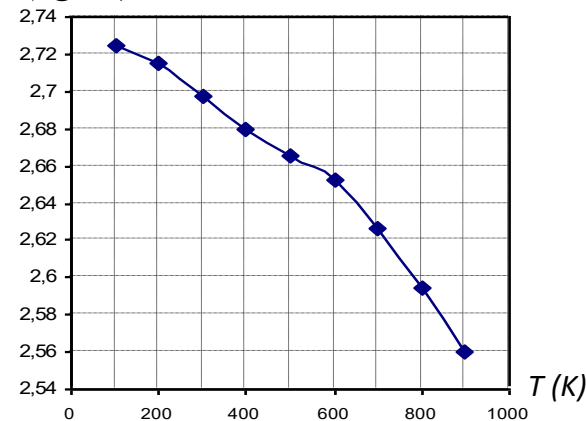
c (J/(kgK)) specific heat



E ($\times 10^4$ MPa) Young's modulus

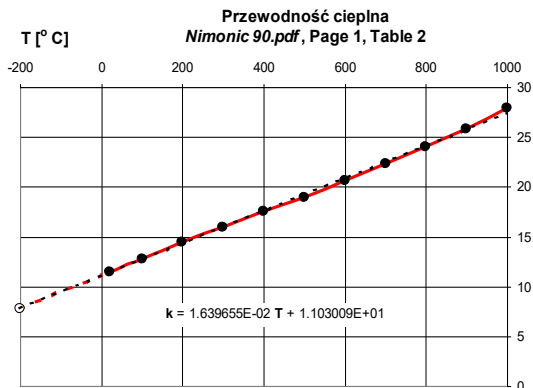


ρ (kg/m³) density

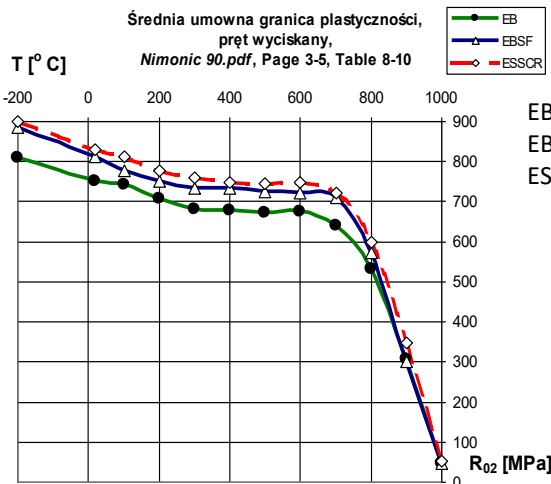
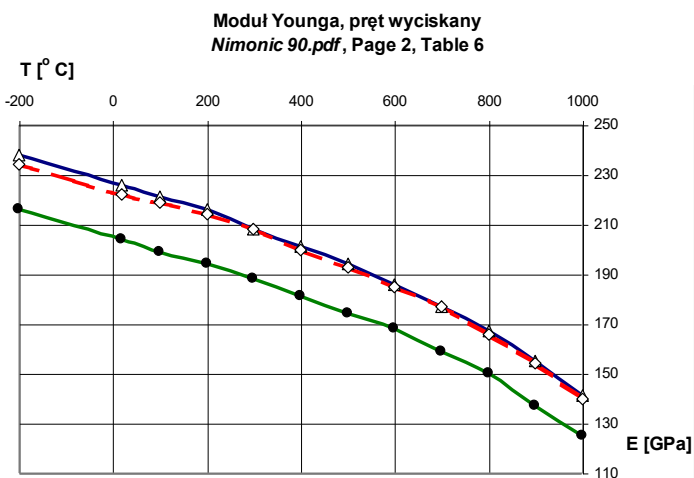
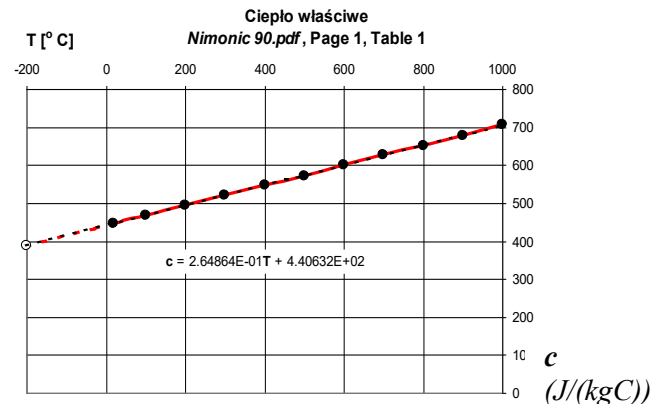
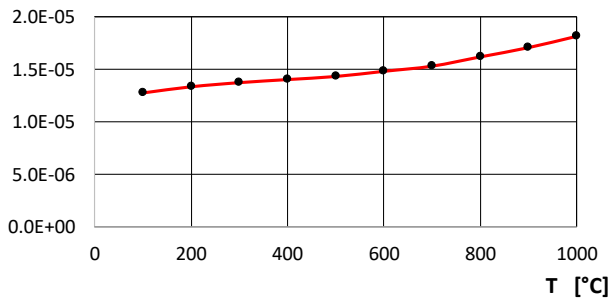


Właściwości termo-mechaniczne w zależności od temperatury

Nimonic 90: stop na bazie niklu, odporny na wysokie temperatury i pełzanie, przeznaczony do stosowania w elementach samolotów i turbin gazowych, takich jak łopatki turbin i dysze wydechowe silników.



α ($1/^\circ\text{C}$) Współczynnik rozszerzalności cieplnej



EB- pręt wyciskany,
EBSF - pręt wyciskany, następnie kuty,
ESSCR - profil wyciskany, następnie walcowany na zimno

www.specialmetals.com

Współczynnik rozszerzalności cieplnej

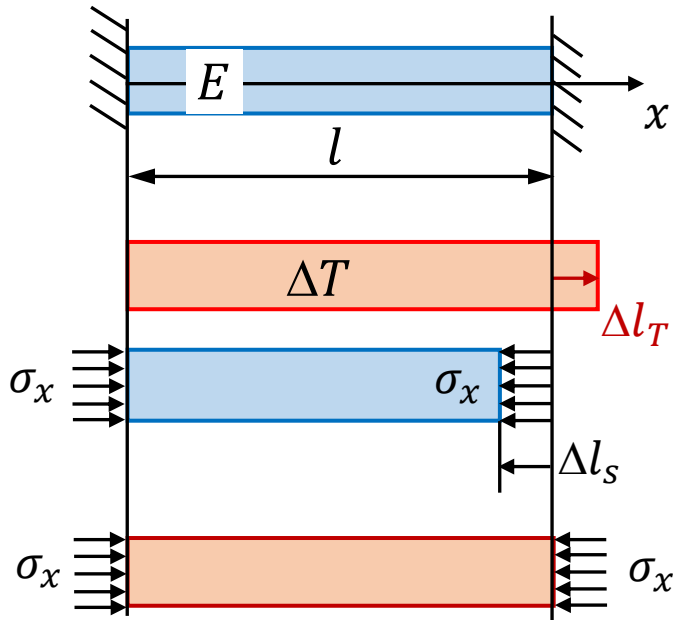
$$\alpha(T) = \frac{l(T) - l(T_{ref})}{(T - T_{ref})l(T_{ref})} = \frac{\Delta l}{l\Delta T} = \frac{\varepsilon(T)}{\Delta T}$$

T_{ref} – temperatura odniesienia dla stanu nieobciążonego,

$$\{\varepsilon\} = \underbrace{\{\varepsilon\}_T}_{\text{odkształcenie termiczne}} + \underbrace{\{\varepsilon\}_s}_{\text{odkształcenie sprężyste}} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_x \Delta T \\ \alpha_y \Delta T \\ \alpha_z \Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_T + \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}_s$$

w przypadku izotropowym $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = \alpha$

Przykład 1: pręt statycznie niewyznaczalny z równomiernym rozkładem temperatury



$$\Delta l_T + \Delta l_S = 0$$

$$\varepsilon_{xT} \cdot l + \varepsilon_{xS} \cdot l = 0$$

$$\alpha \cdot \Delta T \cdot l + \frac{\sigma_x}{E} \cdot l = 0$$

$$\sigma_x = -E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

dla: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\Delta T = 100^\circ\text{C}$, $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5}$ $1/^\circ\text{C}$:

$$\sigma_x = -240 \text{ MPa} \quad (\text{ściskanie} - \text{możliwość wyboczenia})$$

Naprężenie termiczne występują w przypadkach:

- nierównomierne pole temperatur,
- zmiana temperatury i niejednorodność materiału,
- zmiana temperatury i statycznie niewyznaczalne więzy.

Standardowe podejście w analizie naprężeń cieplnych z wykorzystaniem MES

- Analiza przepływu ciepła (*stan ustalony lub nieustalony*)
- Analiza naprężeń wykorzystująca aktualne pole temperatury jako rodzaj sił objętościowych

A. ANALIZA TERMICZNA

Równanie różniczkowe cząstkowe opisujące nieustalony przepływ ciepła w ciele stałym
(prawo zachowania energii)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v(x, y, z, t)$$

$T(x, y, z, t)$ – funkcja opisująca pole temperatury,

q_v – objętościowe źródło ciepła (W/m³),

$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ – ortotropowe współczynniki przewodzenia ciepła (W/mK),

ρ – gęstość ośrodka (kg/m³),

c – ciepło właściwe (J/kg).

Właściwości cieplne wybranych materiałów w temperaturze 20°C (RT)

Material	Thermal expansion coefficient α (1/°C)	Thermal conductivity λ (W/mK)	Specific heat c (J/kgK)	Density ρ (kg/m ³)
Copper	$1,7 \cdot 10^{-5}$	390	400	9000
Aluminium	$2,4 \cdot 10^{-5}$	210	900	2700
Pine wood	$0,4-0,6 \cdot 10^{-5}$	0,1-0,5	1300-2700	500-700
Steel 1H13	$1,1 \cdot 10^{-5}$	29	440	7700
Glass	$0,05-0,09 \cdot 10^{-5}$	0,7-1,3	600-800	2500
Rubber	$7,7 \cdot 10^{-5}$	0,16	1400	1200

Trzy tryby przekazywania ciepła: przewodzenie, konwekcja, promieniowanie

Przewodzenie:

Przenoszenie energii cieplnej przez ciało stałe lub płyn z powodu gradientu temperatury. Równanie opisujące to przenoszenie ciepła to prawo Fouriera.

Dla ośrodka izotropowego:

$$\bar{q} = -\lambda \text{grad } T = -\lambda \nabla T$$

przewodność cieplna

wektor gęstości strumienia ciepła na jednostkę powierzchni (*strumień ciepła*)

Konwekcyjna wymiana ciepła na granicy ciało stałe - płyn:

Gęstość strumienia ciepła przepływającego przez powierzchnię graniczną jest proporcjonalna do różnicy między temperaturą sąsiadującego płynu T_0 a temperaturą powierzchni T_c :

$$q = \alpha_k (T_0 - T_c) \quad (\text{Prawo Newtona})$$

współczynnik przejmowania ciepła (*film coefficient*).

Typowe wielkości współczynnika przejmowania ciepła ($W/(m^2K)$)

Medium (fluid)	Free convection	Forced convection
gas (air)	5–30	30–500
water	30–300	300–20000
oil	5–100	30–3000
liquid metals	50–500	500–20000

Promieniowanie:

Natężenie emisji promieniowania powierzchni szarej (*Prawo Stefana-Boltzmann*):

$$e = \varepsilon \sigma_0 T^4 = C T^4$$

emisyjność względna
powierzchni szarej ($0 < \varepsilon < 1$)

$$\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$$

Wymiana ciepła pomiędzy dwiema równoległymi powierzchniami (A i B):

$$q_{AB} = \varepsilon_{AB} C_o [(T_A/100)^4 - (T_B/100)^4] \quad \text{- gęstość strumienia ciepła wymienianego}$$

gdzie: $C_o = 10^8 \sigma_0$, $\varepsilon_{AB} = \frac{1}{1/\varepsilon_A + 1/\varepsilon_B - 1}$

➔ W praktyce obliczeniowej wymiana ciepła przez granicę (poprzez promieniowanie i konwekcję) jest zwykle opisywana przez model konwekcji: $q = \alpha_k (T_0 - T_c)$, gdzie α_k jest odpowiednią funkcją temperatury.

W ustalonym stanie wymiany ciepła, przy stałych izotropowych właściwościach materiału, równanie przepływu ciepła sprowadza się do równania Poissona

$$\nabla^2 T + f = 0$$

Przepływ ciepła w 2D - równania Poissona

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + f(x_1, x_2) = 0 \quad \bar{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$$

Warunki brzegowe

$$T(\bar{x}) = T_0, \quad \bar{x} \in \Gamma_u \quad - \text{Dirichleta na } \Gamma_u \text{ (zadana temperatura)}$$

$$q(x) = \frac{\partial T(\bar{x})}{\partial n} = q_0, \quad \bar{x} \in \Gamma_q \quad - \text{Neumanna na } \Gamma_q \text{ (zadany strumień ciepły)}$$

Minimalizowany funkcjonal w sformułowaniu MES:

$$I(T) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial x_2} \right)^2 - 2f(x_1, x_2)T \right] d\Omega - \int_{\Gamma_q} q_0 u d\Gamma,$$

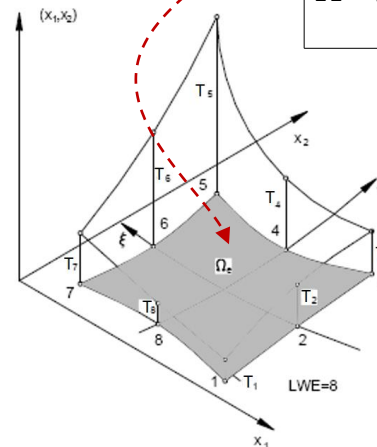
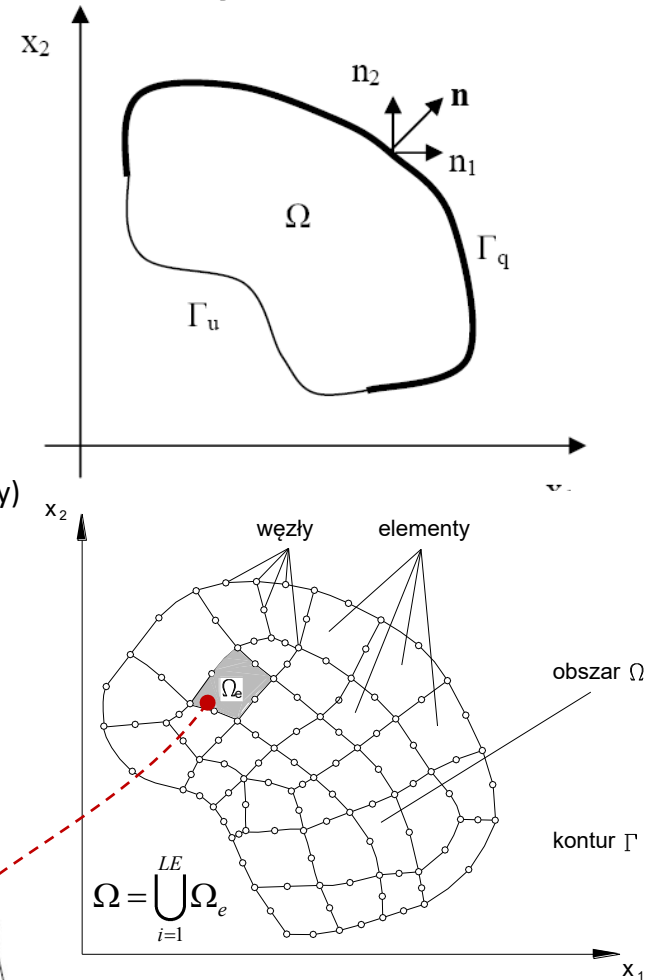
Przybliżamy nieznaną funkcję (temperatury) w obrębie elementu:

$$T(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{LWE} N_i(x_1, x_2) T_i$$

$T_i, i = 1, \dots, LWE$ - temperatury węzłowe,

$N_i(x_1, x_2)$ - funkcje kształtu.

LWE - liczba węzłów w elemencie



Aproksymacja funkcji $T(x, y)$ wewnątrz elementu Ω_e

Minimalizowany funkcjonal po aproksymacji:

$$I(T) \cong \sum_{i=1}^{LE} \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial x_2} \right)^2 - 2f(x_1, x_2)T \right] d\Omega_i - \sum_{j=1}^{LK} \int_{\Gamma_j} q_0 T d\Gamma_j$$

LK liczba boków elementów na Γ_q

W obrębie elementu skończonego:

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{LWE} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} T_i,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = \sum_{i=1}^{LWE} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} T_i.$$

Na koniec minimalizowana funkcja zostaje zastąpiona funkcją pewnej liczby zmiennych T_i

$$I(u) \approx \frac{1}{2} [T_1, T_2, T_3, \dots, T_{LW}] \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \dots & h_{1LW} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & & \\ h_{31} & h_{32} & & & \\ \dots & & & & \\ h_{LW1} & & & & h_{LWLW} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \dots \\ T_{LW} \end{Bmatrix} - [T_1, T_2, T_3, \dots, T_{LW}] \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_{LW} \end{Bmatrix}$$

$$I \approx \frac{1}{2} [T][H]\{T\} - [T]\{b\}$$

Warunki minimalne - konieczne (i wystarczające): $\frac{\partial I}{\partial T_i} = 0 \quad i = 1, \dots, LW$

➔ $[H]\{T\} = \{b\} + \text{Dirichlet b.c.}$

globalna macierz przewodnictwa

globalny wektor obciążenia cieplnego

Przykład 2 Stacjonarny przepływ ciepła w rurze

Stalowa grubościenna rura ma temperaturę wewnętrzną $T_w=100^\circ\text{C}$ a temperaturę zewnętrzną $T_z=20^\circ\text{C}$. Promień wewnętrzny rury $a=30\text{mm}$, zewnętrzny $b=40\text{mm}$. Obliczyć rozkład temperatury.

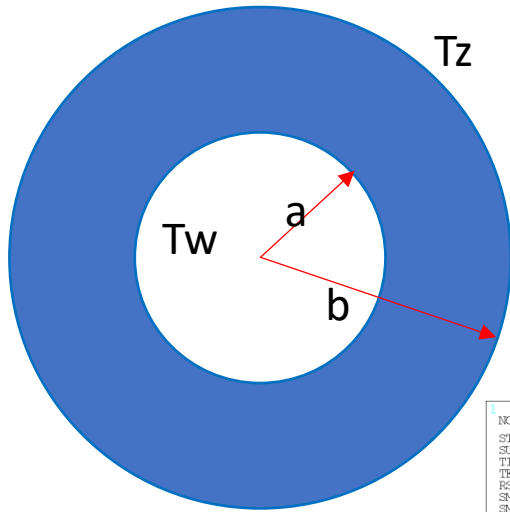
Dane: $\lambda=50\text{W/mK}$.

Równanie Laplace'a:

$$\nabla^2 T = 0 \quad \longrightarrow$$

Rozwiązanie analityczne:

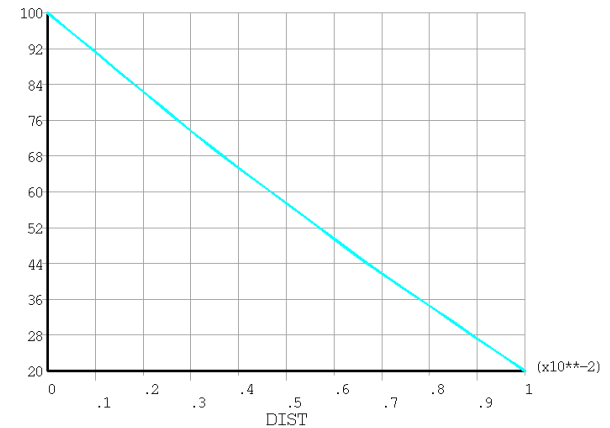
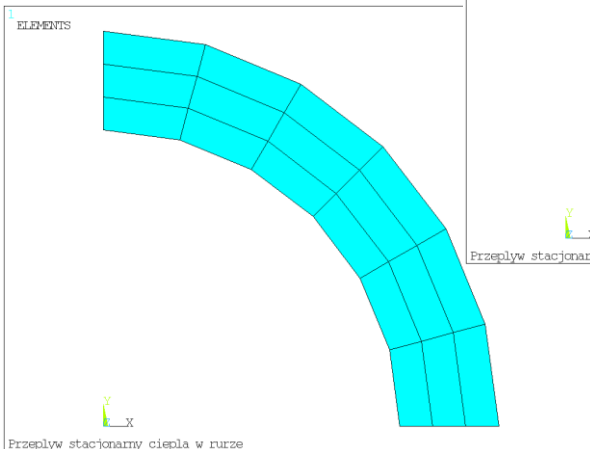
$$T(r) = T_w + \frac{T_z - T_w}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \ln\left(\frac{r}{a}\right)$$



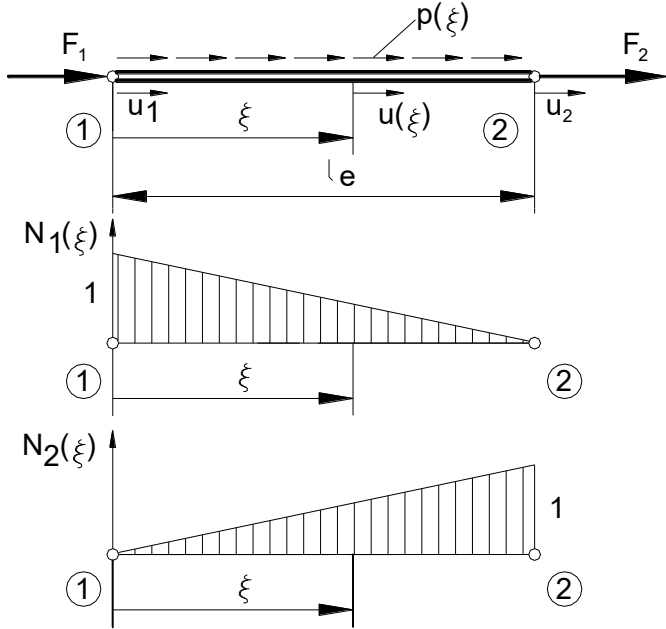
Rozkład temperatury:



Model MES:



Element skończony pręta pod obciążeniami osiowymi (przypomnienie MES1)



Energia sprężysta elementu:

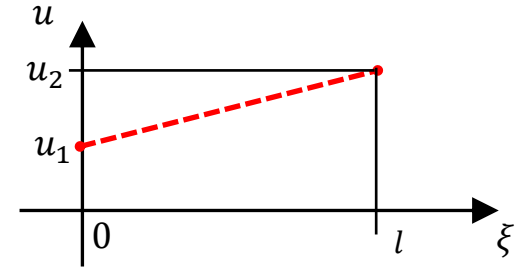
$$U_e = \frac{1}{2} A \int_0^{l_e} \sigma(\xi) \varepsilon(\xi) d\xi = \frac{EA}{2} \int_0^{l_e} (\varepsilon(\xi))^2 d\xi$$

$$U_e = \frac{EA}{2} \int_0^{l_e} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} N_1' \\ N_2' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N_1' & N_2' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e d\xi =$$

$$= \frac{EA}{2} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}_e \int_0^{l_e} \begin{bmatrix} N_1' N_1' & N_1' N_2' \\ N_2' N_1' & N_2' N_2' \end{bmatrix} d\xi \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q \end{bmatrix}_e \begin{bmatrix} k \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} q \end{Bmatrix}_e,$$

Przemieszczenie osiowe:

$$u(\xi) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l_e} \xi$$



Wektor parametrów węzłowych:

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_e$$

Aproksymacja pola przemieszczeń osiowych:

$$u(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) u_1 + \frac{\xi}{l} u_2 = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & N_2(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \end{Bmatrix}_e$$

Wektor funkcji kształtu:

$$\begin{bmatrix} N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & N_2(\xi) \end{bmatrix}$$

Funkcje kształtu:

$$N_1(\xi) = 1 - \frac{\xi}{l}, \quad N_2(\xi) = \frac{\xi}{l}$$

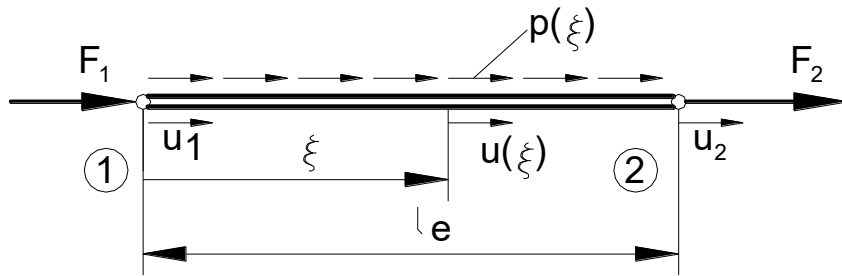
Odształcenie osiowe:

$$\varepsilon(\xi) = \frac{du}{d\xi} = \begin{bmatrix} N_1' & N_2' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e.$$

$$\begin{bmatrix} k \end{bmatrix}_e = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności elementu prętowego

Obciążenie zastępcze pręta obciążonego osiowo (przypomnienie MES1)



Obciążenie ciągłe: $p(\xi) \begin{bmatrix} \text{N} \\ \text{m} \end{bmatrix}$

Aproksymacja pola przemieszczeń osiowych:

$$u(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)u_1 + \frac{\xi}{l}u_2 = \begin{bmatrix} N_1(\xi), N_2(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e$$

Praca obciążenia osiowego:

$$W_{ze}^p = \int_0^{l_e} p(\xi)u(\xi)d\xi = \int_0^{l_e} \begin{bmatrix} N_1(\xi)p(\xi), N_2(\xi)p(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e d\xi =$$

$$= \begin{bmatrix} \int_0^{l_e} N_1(\xi)p(\xi)d\xi, \int_0^{l_e} N_2(\xi)p(\xi)d\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e .$$

$$W_{ze}^p = \begin{bmatrix} F_1^e, F_2^e \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e$$

Obciążenie zastępcze (równoważne):

$$F_i^e = \int_0^{l_e} N_i(\xi)p(\xi)d\xi$$

Układ równań:

$$\boxed{[K]\{q\} = \{F\}}$$

Naprężenia w pręcie:

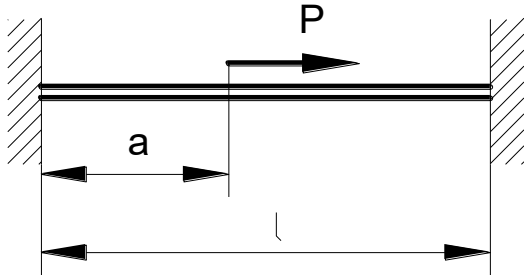
$$\sigma = E\varepsilon = E \begin{bmatrix} N_1'(\xi), N_2'(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e = \frac{E(q_2 - q_1)}{l_e}$$

Przykład 3 Pręt obciążony siłą skupioną

$$\{q\}_1 = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{q\}_2 = \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}$$

Lokalne wektory parametrów węzłowych

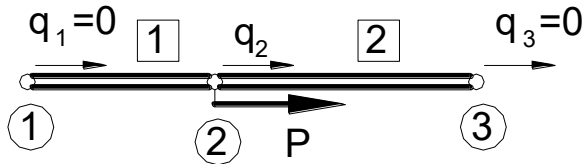


Macierze sztywności elementów:

$$[k]_e^1 = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k]_e^2 = \frac{EA}{l-a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Globalny wektor parametrów węzłowych: $\{q\}_e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ q_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$



Globalny wektor sił: $\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \mathbf{P} \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{R}_3 \end{Bmatrix}$

Globalna macierz sztywności:

$$EA \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} + \frac{1}{l-a} & -\frac{1}{l-a} \\ 0 & -\frac{1}{l-a} & \frac{1}{l-a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$



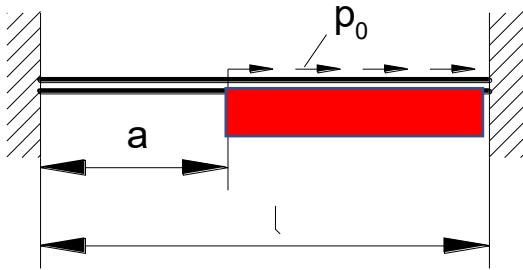
$$q_2 = \frac{P(l-a)a}{EA l}$$

$$F_1 = \frac{-P(l-a)}{l},$$

Reakcje

$$F_3 = \frac{-Pa}{l}.$$

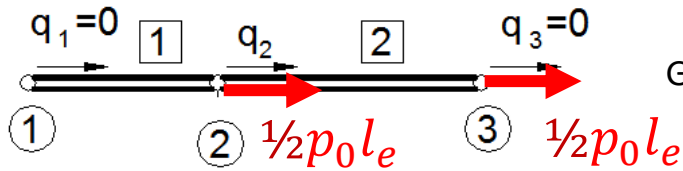
Przykład 4 Pręt obciążony wydatkiem stałym obciążenia



Globalny wektor parametrów węzłowych: $\{q\}_e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ q_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Siła zastępcza w węźle 1 i 2 elementu 2:

$$F_1^e = \int_0^{l_e} N_1 p_0 d\xi = \int_0^{l_e} \left(1 - \frac{\xi}{l_e}\right) p_0 d\xi = \frac{p_0 l_e}{2} = \frac{p_0(l-a)}{2}$$



Globalny wektor sił: $\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ \frac{1}{2} p_0(l-a) \\ R_3 + \frac{1}{2} p_0(l-a) \end{Bmatrix}$

Globalna macierz sztywności:

$$EA \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} + \frac{1}{l-a} & -\frac{1}{l-a} \\ 0 & -\frac{1}{l-a} & \frac{1}{l-a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Reakcja w węźle 3:

$$R_3 = F_3 - \frac{p_0(l-a)l}{2l} = \frac{-p_0 a(l-a)}{2l} - \frac{p_0(l-a)l}{2l} = \frac{-p_0(l-a)(l+a)}{2l}$$

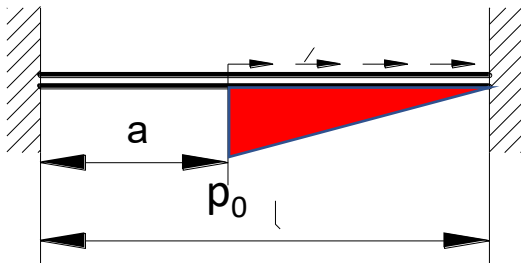
Reakcja w węźle 1

$$F_1 = \frac{-p_0(l-a)^2}{2l}$$

$$q_2 = \frac{p_0(l-a)^2 a}{2lEA}$$

$$F_3 = \frac{-p_0 a(l-a)}{2l}$$

Przykład 5 Pręt obciążony wydatkiem liniowo zmiennym



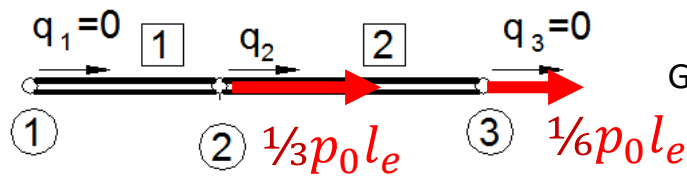
Globalny wektor parametrów węzłowych: $\{q\}_e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ q_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Siła zastępcza w węźle 1 elementu 2:

$$F_1^e = \int_0^{l_e} N_1 p(\xi) d\xi = \int_0^{l_e} N_1 N_1 p_0 d\xi = \frac{p_0 l_e}{3} = \frac{p_0(l-a)}{3}$$

Siła zastępcza w węźle 2 elementu 2:

$$F_2^e = \int_0^{l_e} N_2 p(\xi) d\xi = \int_0^{l_e} N_2 N_1 p_0 d\xi = \frac{p_0 l_e}{6} = \frac{p_0(l-a)}{6}$$



Globalny wektor sił: $\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ \frac{1}{3} p_0(l-a) \\ R_3 + \frac{1}{6} p_0(l-a) \end{Bmatrix}$

Globalna macierz sztywności:

$$EA \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} + \frac{1}{l-a} & -\frac{1}{l-a} \\ 0 & -\frac{1}{l-a} & \frac{1}{l-a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Reakcja w węźle 3:

$$R_3 = F_3 - \frac{p_0(l-a)}{6} = \frac{-p_0 a(l-a)}{3l} - \frac{p_0(l-a)l}{6l} = -\frac{p_0(l-a)(l+2a)}{6l}$$

Reakcja w węźle 1

$$F_1 = \frac{-p_0(l-a)^2}{3l}$$

$$q_2 = \frac{p_0(l-a)^2 a}{3lEA}$$

$$F_3 = \frac{-p_0 a(l-a)}{3l}$$

B. ANALIZA NAPRĘŻEŃ CIEPLNYCH – równania MES w przypadku obciążeń mechanicznych i cieplnych

Odształcenie:

$$\{\varepsilon\} = \underbrace{\{\varepsilon\}_T}_{\text{odkształcenie termiczne}} + \underbrace{\{\varepsilon\}_s}_{\text{odkształcenie sprężyste}} \quad \Rightarrow \quad \{\varepsilon\}_s = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}_T$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\}_e$$

[B] – macierz odkształceń elementów

$$\varepsilon_T = \begin{Bmatrix} \alpha_x \Delta T \\ \alpha_y \Delta T \\ \alpha_z \Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_T$$

Stosując prawo Hooke'a :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}_s = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}_T) = [D]([B]\{q\}_e - \{\varepsilon\}_T) \quad (*)$$

[D] – macierz konstytutywna
(macierz sztywności materiału)

Równania MES uwzględniające odkształcenia termiczne:

$$[k]_e \{q\}_e = \{F\}_e + \{F_T\}_e$$

$$[k]_e = \int_{\Omega_e} [B]^T [D] [B] d\Omega_e$$

macierz sztywności elementów

$$\{F_T\}_e = \int_{\Omega_e} [B]^T [D] \{\varepsilon\}_T d\Omega_e$$

dodatkowy wektor sił węzłowych
(siły węzłowe wywołane temperaturą)

$$[K]\{q\} = \{F\} + \{F_T\} \quad - \text{Zestaw równań MES dla całego modelu}$$

Naprężenia ciepłne w elementach prętowych

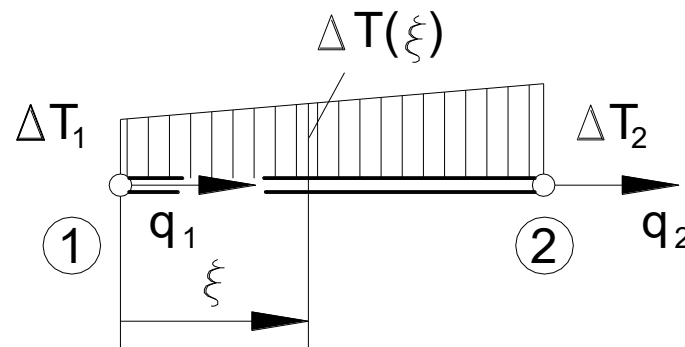
Podstawowe relacje dla 2-węzłowego elementu prętowego

$$u(\xi) = [N_1, N_2] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e, \quad \text{funkcje kształtu: } \begin{cases} N_1(\xi) = 1 - \frac{\xi}{l_e} \\ N_2(\xi) = \frac{\xi}{l_e} \end{cases}$$

$$\varepsilon(\xi) = \frac{du}{d\xi} = [N'_1, N'_2] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e,$$

$$\sigma(\xi) = E(\varepsilon(\xi) - \varepsilon_T)$$

$$\Delta T(\xi) = [N_1(\xi), N_2(\xi)] \begin{Bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \end{Bmatrix}$$



$$\{F_T\}_e = \int_{\Omega_e} [B]^T [D] \{\varepsilon\}_T d\Omega_e$$

[D] = E

$$[B]^T = [N'_1, N'_2]^T = \begin{Bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\}_T = \varepsilon_T = \alpha \Delta T(\xi) = \alpha [N_1, N_2] \begin{Bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \end{Bmatrix}$$

Wektor sił cieplnych węzłowych:

$$\{F_T\}_e = \int_{\Omega_e} [B]^T [D] \{\varepsilon\}_T d\Omega_e = \int_{\Omega_e} \begin{Bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \end{Bmatrix} \cdot \alpha \cdot E [N_1, N_2] d\Omega_e \begin{Bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \end{Bmatrix} =$$

$$= \alpha EA \int_0^{l_e} \begin{bmatrix} N'_1 N_1 & N'_1 N_2 \\ N'_2 N_1 & N'_2 N_2 \end{bmatrix} d\xi \begin{Bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \end{Bmatrix} = \alpha EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{F_T\}_e = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2} \alpha EA \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

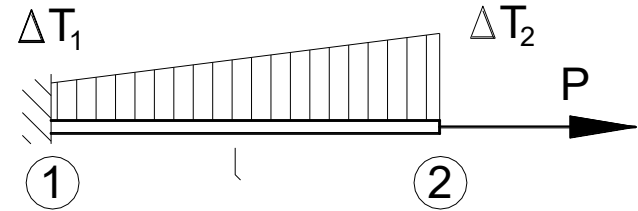
PRZYKŁAD 6 Znajdź wydłużenie pręta obciążonego siłą P i rozkładem temperatury T

$$[k]_e \{q\}_e = \{F\}_e + \{F_T\}_e$$

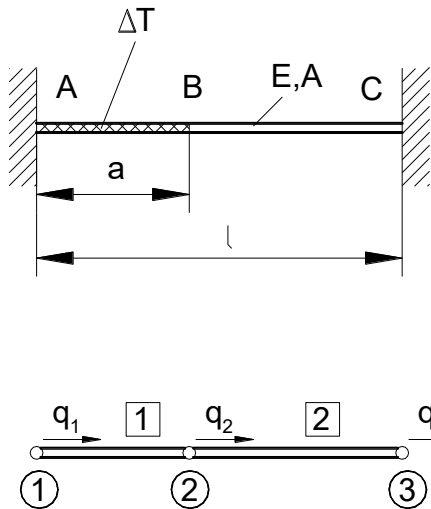
$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \end{Bmatrix} + \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \alpha EA$$

$$q_1 = 0$$

$$\frac{EA}{l} \cdot q_2 = P + \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2} \alpha EA \quad \longrightarrow \quad q_2 = \frac{Pl}{EA} + \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2} \alpha l$$



PRZYKŁAD 4 Znajdź naprężenia w pręcie utwierdzonym obustronnie i ogrzewanym w części AB



$$q_1 = 0, q_3 = 0$$

$$EA \begin{bmatrix} \frac{1}{l_1} & -\frac{1}{l_1} & 0 \\ -\frac{1}{l_1} & \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} & -\frac{1}{l_2} \\ 0 & -\frac{1}{l_2} & \frac{1}{l_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \alpha EA \Delta T \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$EA \left(\frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} \right) q_2 = \alpha EA \Delta T \quad \longrightarrow \quad q_2 = \alpha \Delta T \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} = \alpha \Delta T \frac{a(l-a)}{l}$$

Element 1 :

$$\varepsilon_1 = [N'_1, N'_2] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \frac{q_2}{a} = \alpha \Delta T \frac{l-a}{l}$$

$$\sigma_1 = E(\varepsilon_1 - \alpha \Delta T) = -\alpha \Delta T E \frac{a}{l}$$

Element 2 :

$$\varepsilon_2 = [N'_1, N'_2] \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l-a} & \frac{1}{l-a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{-q_2}{l-a} = -\alpha \Delta T \frac{a}{l}$$

$$\sigma_2 = E(\varepsilon_2 - 0) = -\alpha \Delta T E \frac{a}{l}$$

Sieczny współczynnik rozszerzalności cieplnej $\alpha_{se}(T)$

(Secant coefficient of thermal expansion)

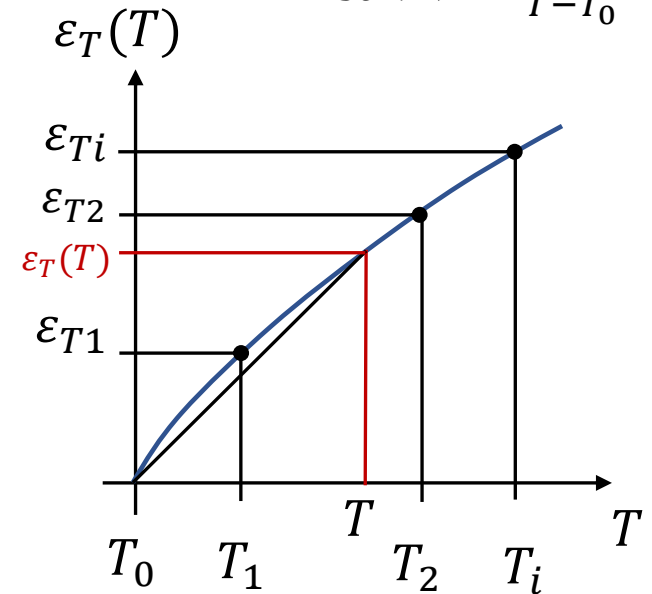
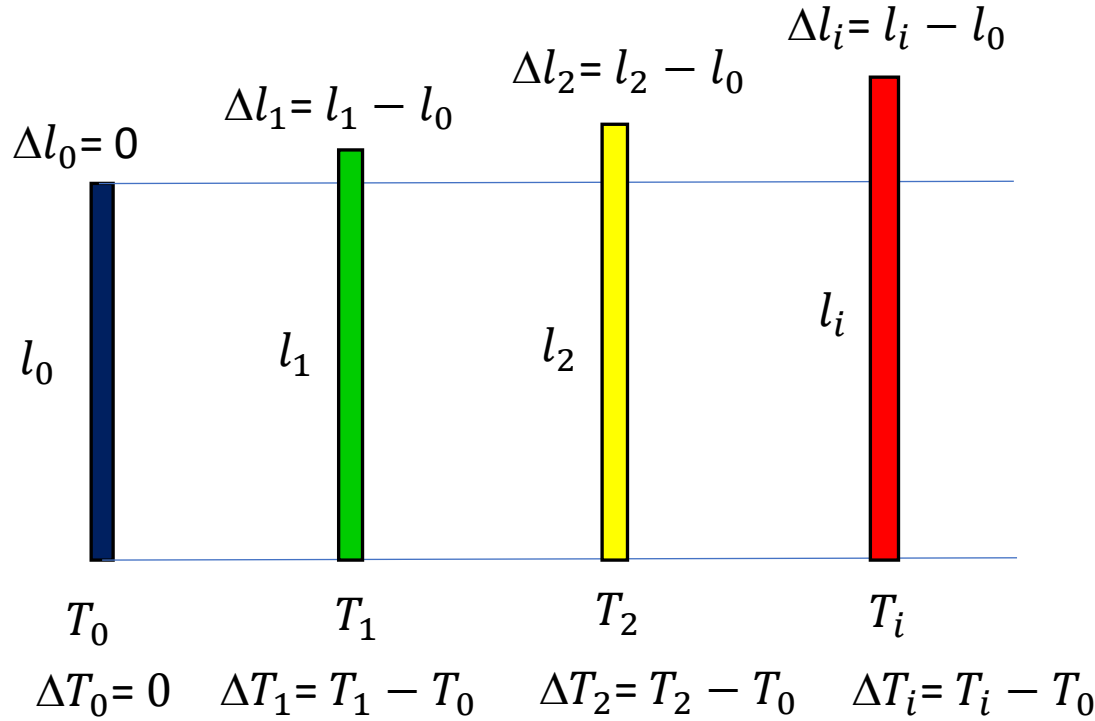
Odształcenie termiczne: $\varepsilon_T = \frac{\Delta l}{l} = \alpha_{se} \cdot \Delta T$

$$\varepsilon_{Ti} = \frac{\Delta l_i}{l_0}$$

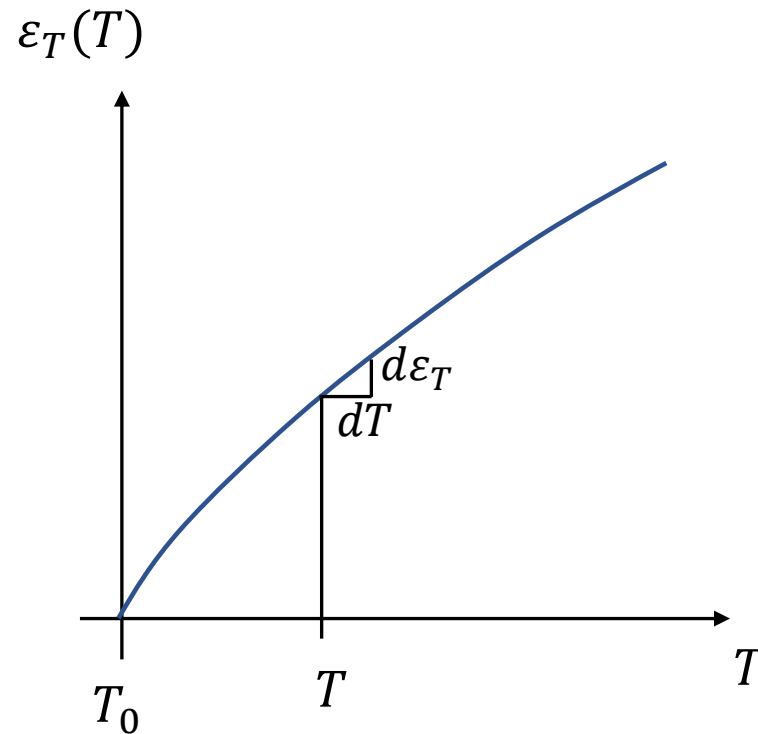
secant coefficient of thermal expansion

$$\alpha_{se}(T_i) = \frac{\varepsilon_{Ti}}{\Delta T_i} = \frac{\Delta l_i}{l_0 \Delta T_i}$$

$$\alpha_{se}(T) = \frac{\varepsilon_T(T)}{T - T_0}$$



Chwilowy współczynnik rozszerzalności termicznej $\alpha_{ins}(T)$
(*Instantaneous coefficient of thermal expansion*)



$$\alpha_{ins}(T) = \frac{d\epsilon_T}{dT}$$

Współczynnik rozszerzalności cieplnej

T_0 - temperatura, w której $\varepsilon_T = 0$ - w teście

T_{REF} - temperatura, w której $\varepsilon_T = 0$ - dla warunków pracy

dla $T_{REF} = T_0$:

$$\alpha_{se}(T) = \frac{1}{(T - T_0)} \int_{T_0}^T \alpha_{ins}(\bar{T}) d\bar{T}$$

$$\varepsilon_T(T) = \alpha_{se}(T) \cdot (T - T_0)$$

jeśli $T_{REF} \neq T_0$, współczynnik siczny $\alpha_{se}(T)$ jest przeliczany

Przykłady elementów termicznych w programie ANSYS

Thermal Mass	Quad 4node 55
Link	8node 77
Solid	Triangl 6node 35
Shell	Axi-har 4node 75
	8node 78
	Brick 8node 278
	20node 279
	8node 70
	20node 90

Thermal Mass	3D conduction 33
Link	convection 34
Solid	radiation 31
Shell	

PLANE55

2-D 4-Node Thermal Solid

4 nodes 2-D space

DOF: TEMP



PLANE77

2-D 8-Node Thermal Solid

8 nodes 2-D space

DOF: TEMP



SOLID70

3-D Thermal Solid

8 nodes 3-D space

DOF: TEMP

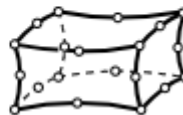


SOLID90

3-D 20-Node Thermal Solid

20 nodes 3-D space

DOF: TEMP

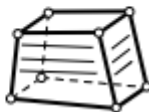


SOLID278

3-D 8-Node Thermal Solid

8 nodes 3-D space

DOF: TEMP



SOLID279

3-D 20-Node Thermal Solid

20 nodes 3-D space

DOF: TEMP



LINK33

Thermal 3-D Conduction Bar

2 nodes 3-D space

DOF: TEMP



LINK34

Convection Link

2 nodes 3-D space

DOF: TEMP



LINK31

Radiation Link

2 nodes 3-D space

DOF: TEMP



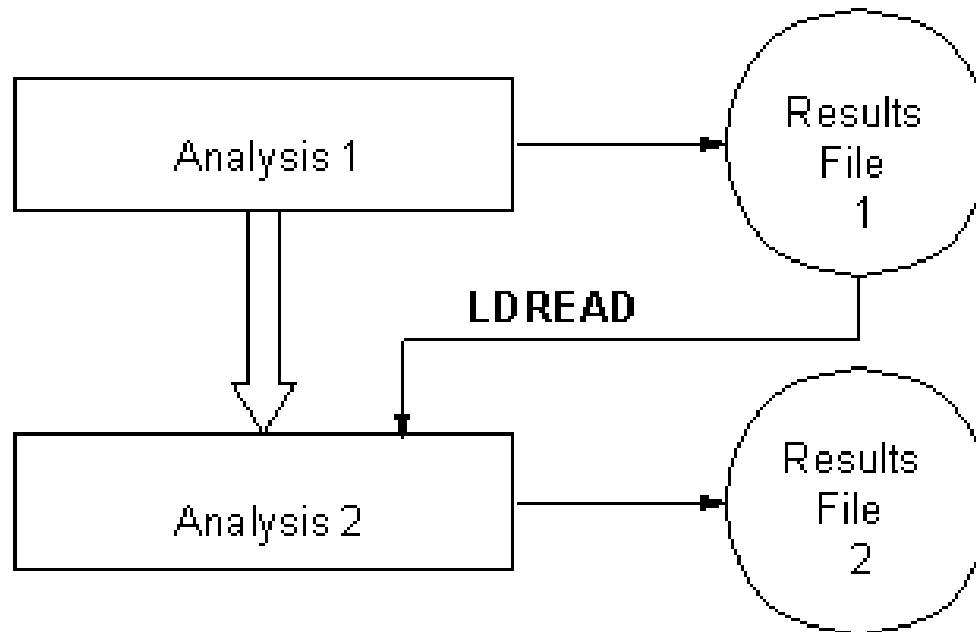
Przebieg analizy termo- strukturalnej w programie ANSYS

Naprężenia cieplne są zazwyczaj analizowane przy użyciu metody sekwencyjnej.

Metoda sekwencyjna obejmuje dwie lub więcej analiz sekwencyjnych, z których każda należy do innego pola. Łączymy dwa pola, stosując wyniki z pierwszej analizy jako obciążenia dla drugiej analizy.

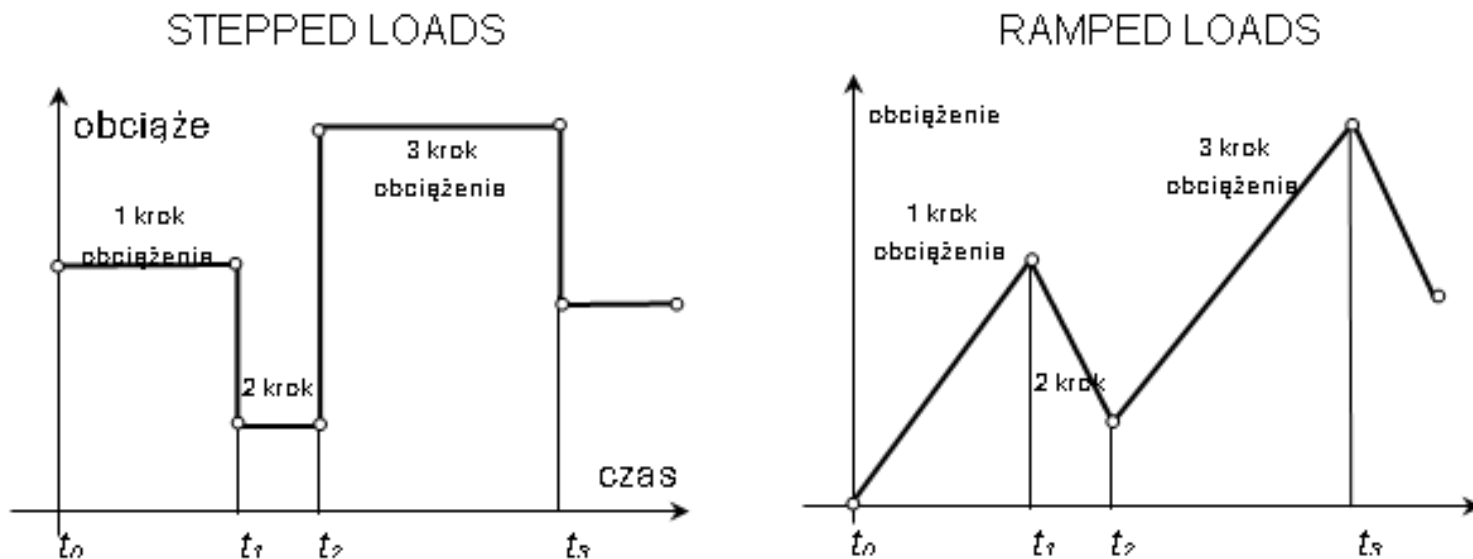
W przypadku analizy naprężeń cieplnych temperatury węzłowe z analizy cieplnej (*Result File 1*) są stosowane jako obciążenia termiczne w kolejnej analizie naprężeń.

Ansyst umożliwia również użycie metody bezpośredniej, która obejmuje tylko jedną analizę, która wykorzystuje typ elementu pola sprzężonego zawierający wszystkie niezbędne stopnie swobody.



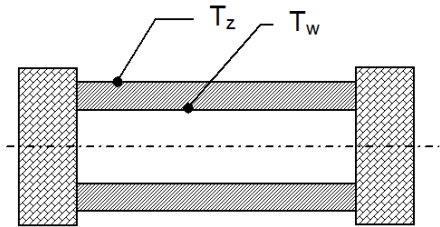
Sposoby wprowadzania obciążeń w programie ANSYS

W przypadku analizy nieustalonego przepływu ciepła należy we właściwy sposób uwzględnić zmiany warunków brzegowych, traktowanych jako obciążenia (rys. 6.5.2). Warunki brzegowe mogą być przykładane gwałtownie (*stepped loads*) albo płynnie (*ramped loads*). W przypadku złożonych procesów przebieg zmian warunków brzegowych przedstawiamy jako sekwencję kolejnych kroków obciążenia (*load steps*).



Historia obciążeń w przypadku skokowych (a) i stopniowych (b) zmian oddziaływań zewnętrznych

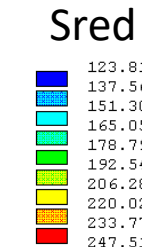
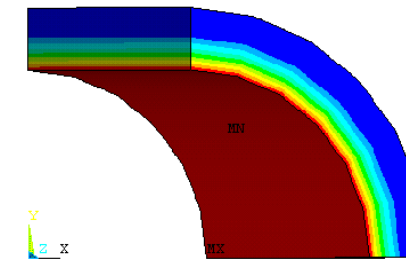
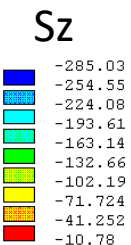
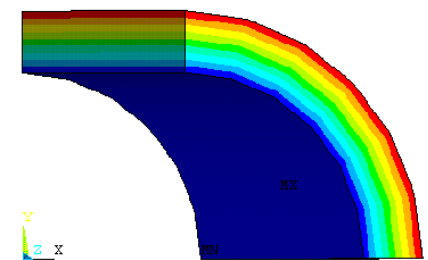
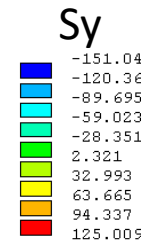
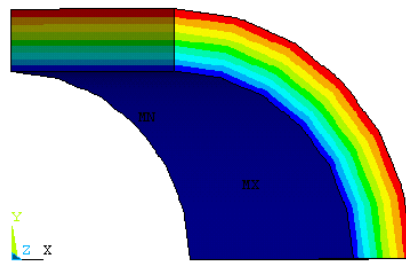
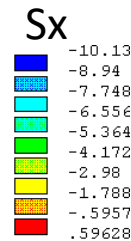
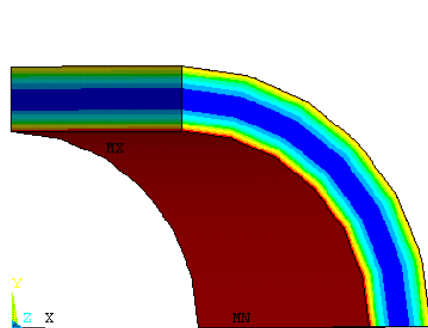
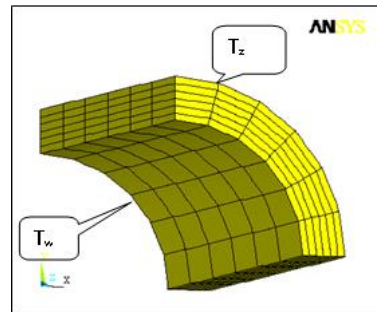
Przykład 7a - naprężenia cieplne w ustalonym przepływie ciepła



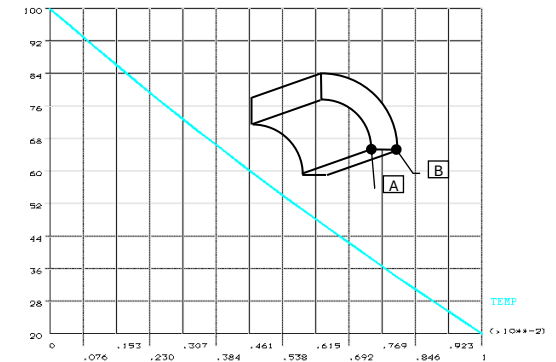
W stalowej grubej rurze mamy temperaturę wewnętrzną $T_w=100^{\circ}\text{C}$ i temperaturę zewnętrzną $T_z=20^{\circ}\text{C}$. Promień wewnętrzny to $a=30\text{mm}$, a zewnętrzny $b=40\text{mm}$. Wyznaczyć rozkład temperatury, naprężenia von Misesa i składowe stanu naprężenia w cylindrycznym układzie współrzędnych.

$E=2e11\text{Pa}$, $\nu=0.3$, $\alpha_t=1.2e-5\text{ 1/K}$, $\lambda=50\text{ W/mK}$.

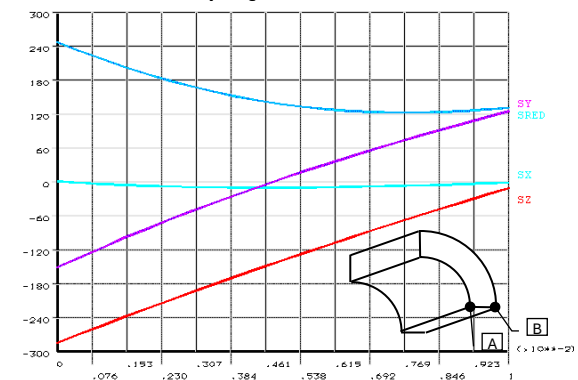
Rozważmy rurę związaną w kierunku osiowym na obu końcach.



Rozkład temperatury na ścieżce AB



Rozkład naprężeń na ścieżce AB



Rozkład naprężeń promieniowych (S_x), obwodowych (S_y), osiowych (S_z) i von Misesa (S_{red})

Przykład 7b – modyfikacje zadania

Zad 1. Rozwiąż problem **modelem 3D**.

Zad 2. Powtórz analizę z wykorzystaniem **modelu osiowo-symetrycznego 2D**.

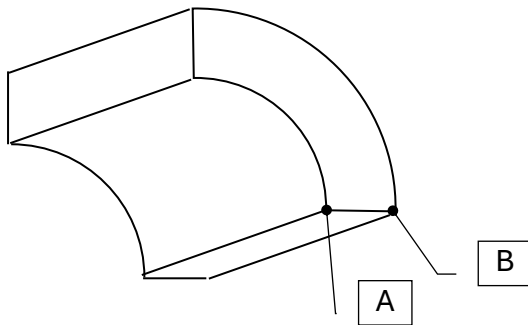
Zad 3. Powtórz analizę z wykorzystaniem **modelu 2D płaskiego stanu odkształcenia (PSO)**.

Zad 4. Powtórz obliczenia z wykorzystaniem **modelu z innymi warunkami brzegowymi:**

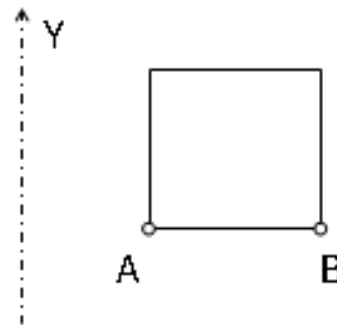
powierzchnia wewnętrzna: temp. otoczenia 100C, współczynnik wymiany 500 W/(m²K)

powierzchnia zewnętrzna: temp. otoczenia 20C, współczynnik wymiany 10 W/(m²K).

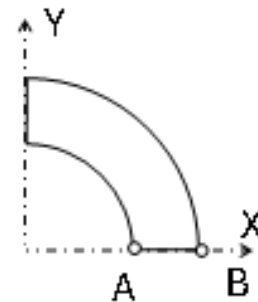
UWAGA na wybór jednostek: SI (N, m, s, W, kg) lub mod_SI (N, mm, s, mW, t)



Zad.1



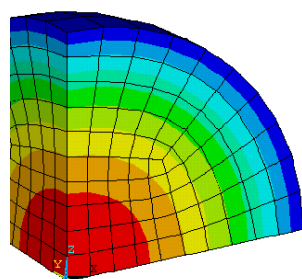
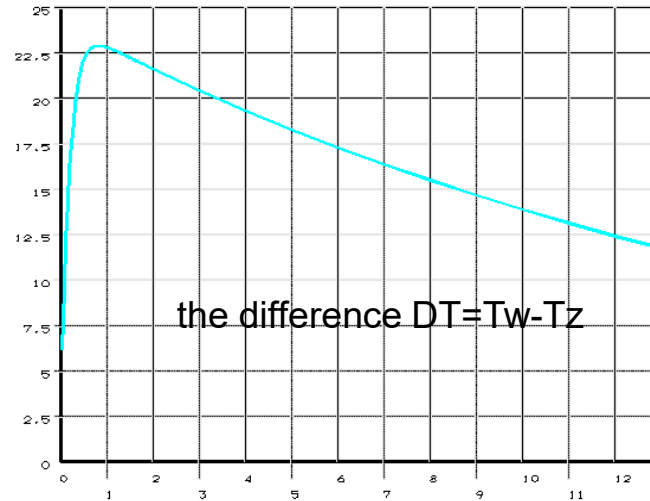
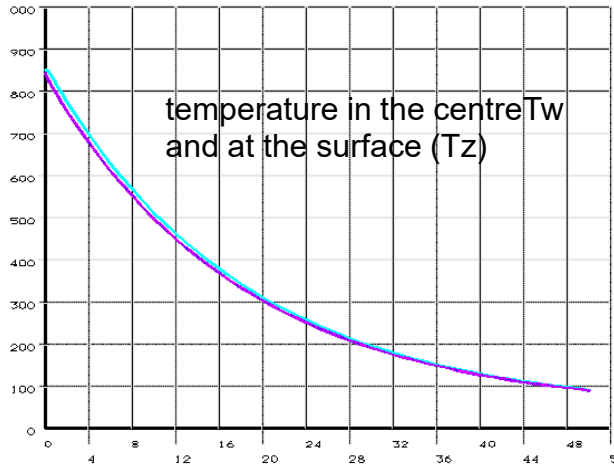
Zad.2



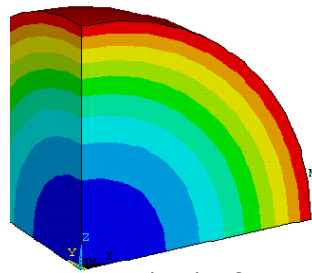
Zad.3

Przykład 8a - naprężenia cieplne w przepływie ciepła nieustalonego (model 3D)

Kulka stalowa o średnicy $d=12\text{mm}$ i temperaturze $T_1=850^\circ\text{C}$, hartuje się w oleju o $T_o=40^\circ\text{C}$ i $\alpha_k=400\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$.
 Jak długo kulka powinna pozostawać w kąpeli olejowej, aby uzyskać temperaturę $T_2=100^\circ\text{C}$ w jej środku?
 Jakie jest maksymalne naprężenie von Misesa w trakcie procesu?

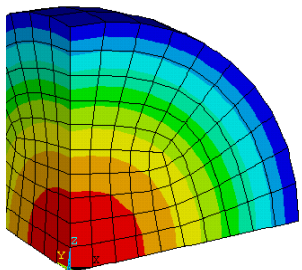


797.847
800.036
802.224
804.413
806.601
808.79
810.978
813.167
815.355
817.544

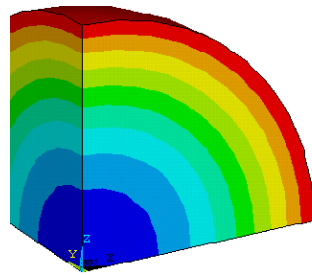


SMN =4517
SMX =.290E+08
4517
.323E+07
.645E+07
.967E+07
.129E+08
.161E+08
.193E+08
.226E+08
.258E+08
.290E+08

Temperature distribution ($^\circ\text{C}$) and von Mises stress (Pa) after 1 s of cooling



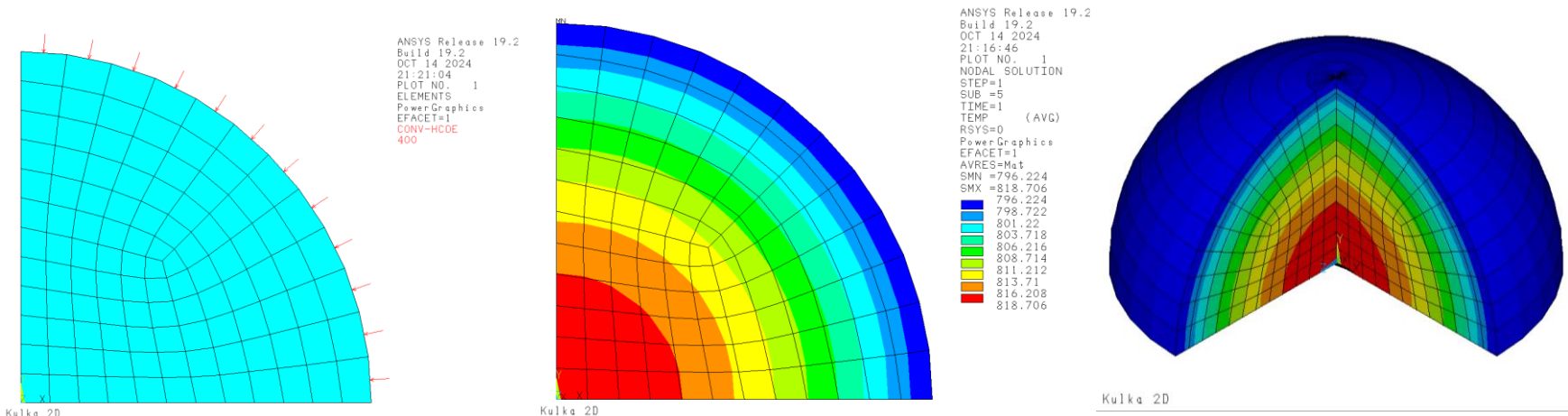
98.955
99.153
99.352
99.55
99.748
99.947
100.145
100.343
100.541
100.74



SMX =.246E+07
493.098
274258
548023
821788
.110E+07
.137E+07
.164E+07
.192E+07
.219E+07
.246E+07

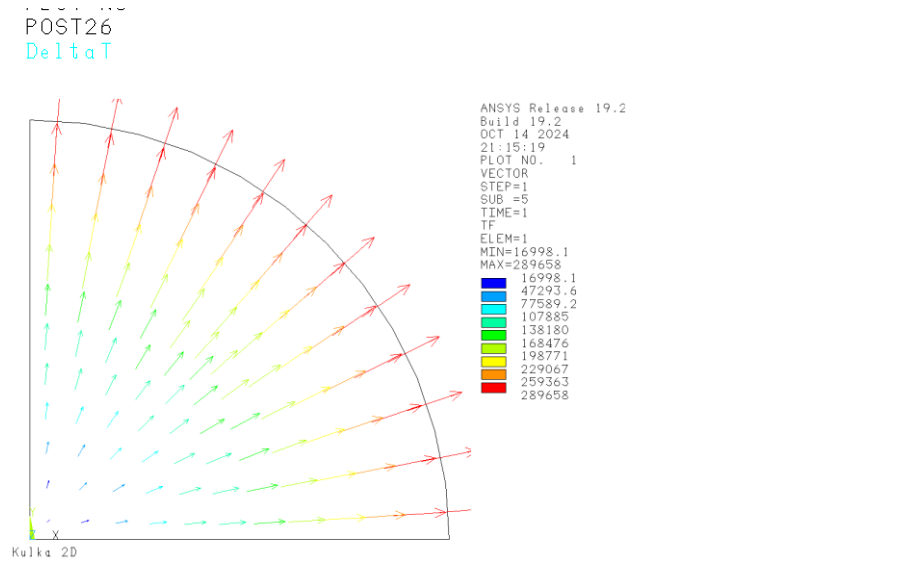
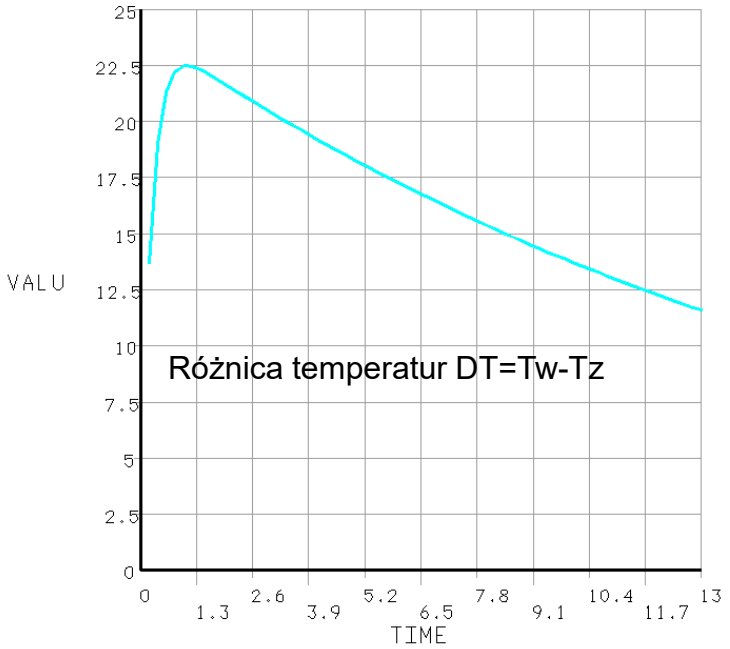
Temperature distribution ($^\circ\text{C}$) and von Mises stress (Pa) after 46 seconds of cooling

Przykład 8b - naprężenia ciepne w przepływie ciepła nieustalonego (model 2D – osiowa sym.)



Współczynnik przejmowania ciepła na powierzchni zewnętrznej

Rozkład temperatury (°C) po 1 s chłodzenia

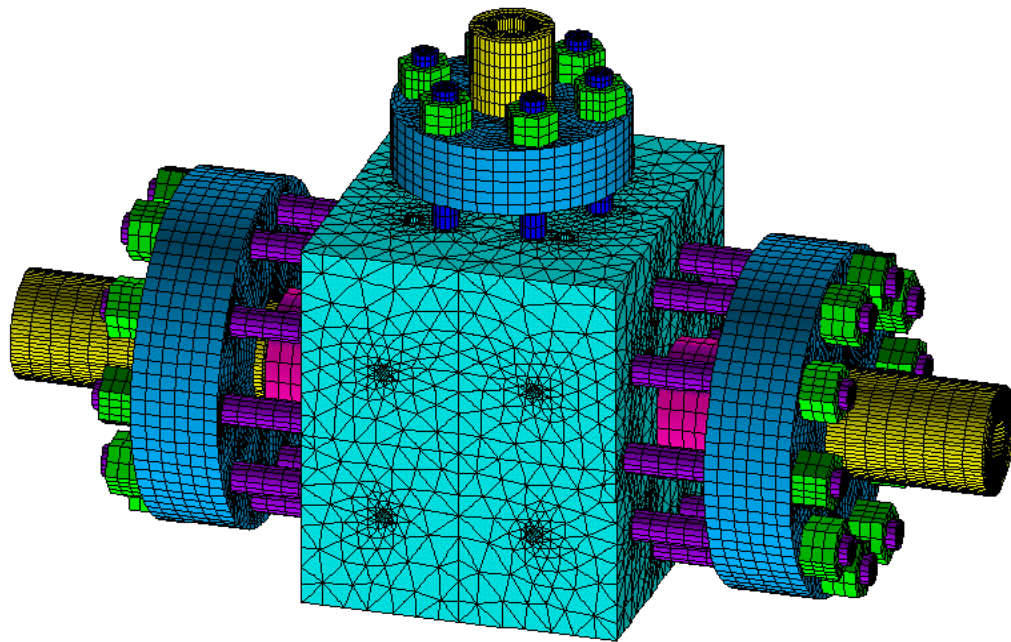


Strumień ciepła(°C) po 1 s chłodzenia

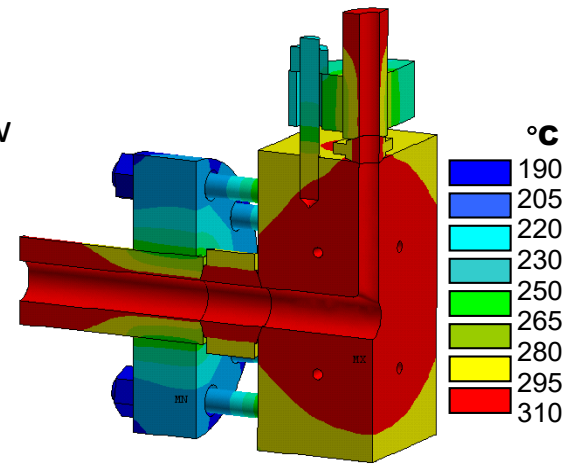
PRZYKŁAD PROBLEMÓW INŻYNIERYJNYCH NAPRĘŻEŃ CIEPLNYCH

FE analysis of a high-pressure T-connection (1995)

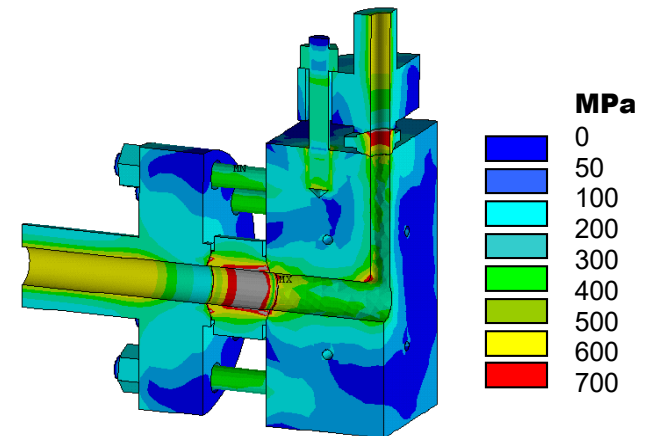
The aim of the analysis was to find out stress and strain distribution in a T-connection caused by high internal pressure (2600 at) and temperature gradients. External cooling, assembly procedure (screw pretension), contact and plasticity effects have been included. The project done for ORLEN petrochemical company.



FE model



Temperature distribution



Von Mises stress

Analiza MES lokalnych spiętrzeń naprężeń wywołanych uderzeniowymi obciążeniami cieplnymi

Opis analizy:

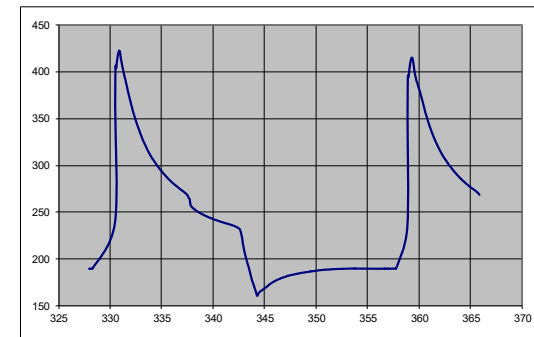
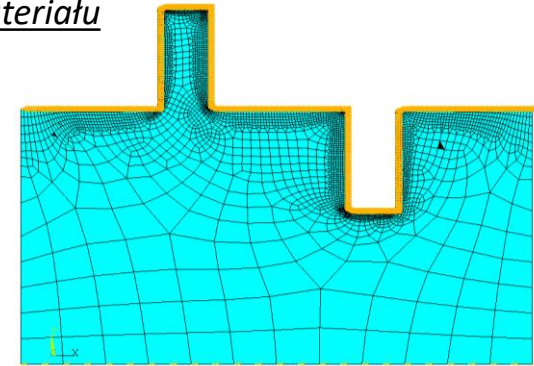
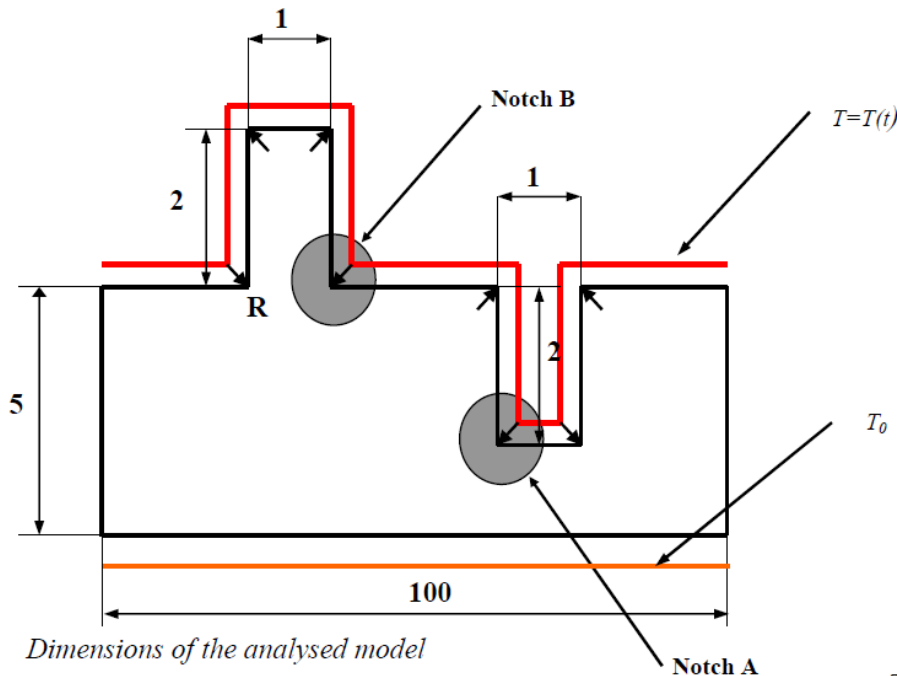
- Głównym celem analizy było znalezienie koncentracji naprężeń blisko korbów podczas procesu nagrzewania-chłodzenia.
 - Temperaturę przyłożoną do górnej powierzchni, $T(t)$, **pobrano z eksperymentów**.
- Analizę przeprowadzono dla trzech promieni korbów R ($R = 0.5, 1.0, 2.0$ mm).

Warunki początkowe i brzegowe:

- Temperatura dolnej powierzchni (linia w modelu 2D) $T = T(t_0)$ jest stała w trakcie procesu.
- Temperatura odniesienia dla analizy strukturalnej $T_{REF} = T(t_0)$.

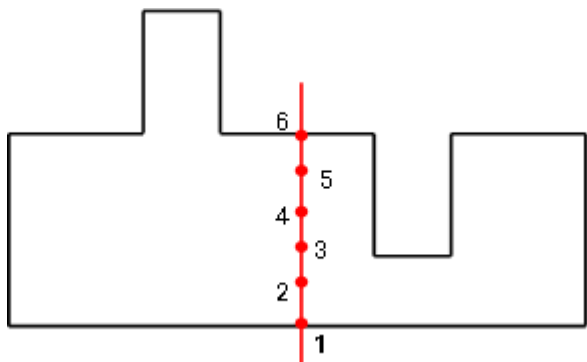
Właściwości materiału są funkcjami temperatury. Brak naprężenia początkowego.

Płaski stan odkształcenia, Analiza nieustalona, Spr.-plast. zachowanie materiału

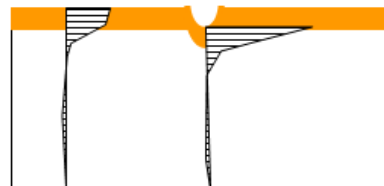
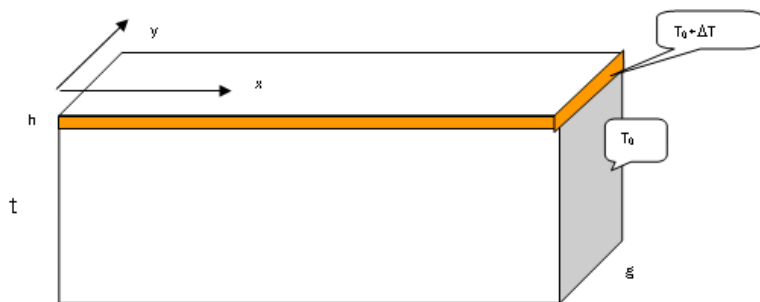
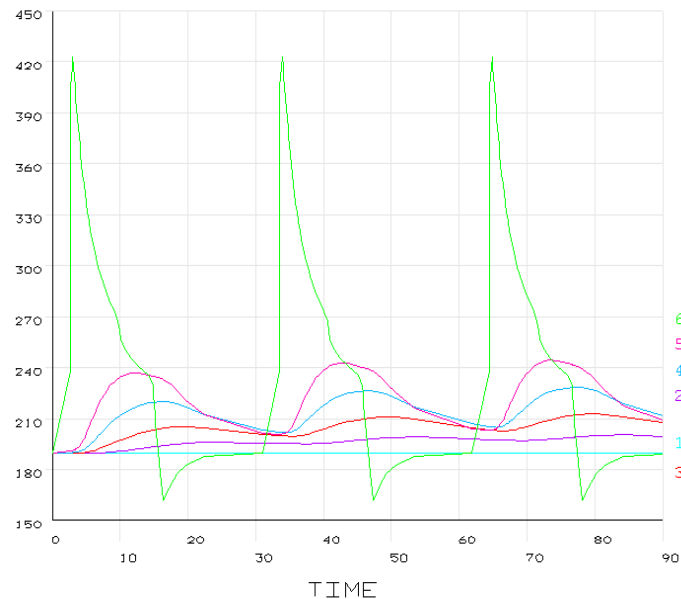


Temperatura jako funkcja czasu na powierzchni matrycy

Analiza MES lokalnych spiętrzeń naprężeń wywołanych obciążeniami cieplnymi uderzeniowymi



Temperatury w punktach od 1 do 6 w trakcie procesu



Model ciała z cieką warstwą poddaną nagrzewaniu – proste rozważania analityczne Przyjmując $h \ll t$ w nagrzanej warstwie:

$$\varepsilon_x = 0,$$

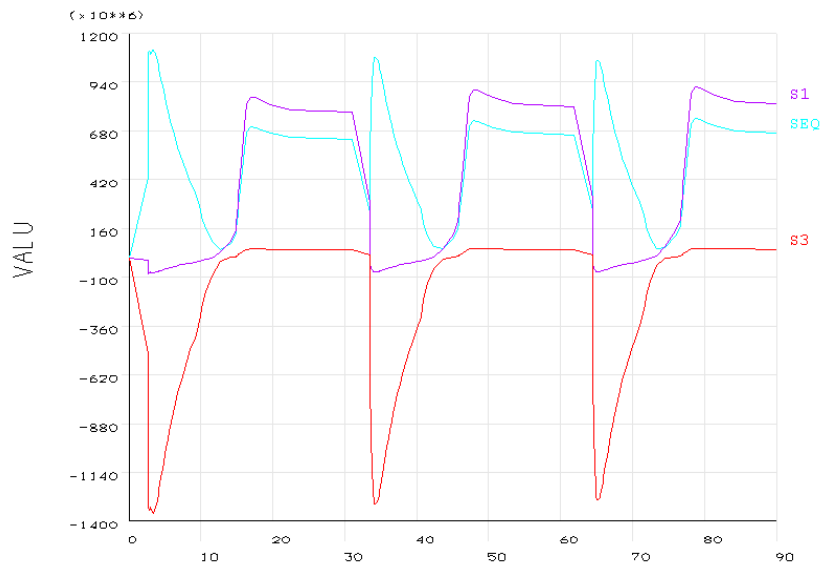
$$\varepsilon_y = 0,$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{-1}{1-\nu} E \alpha \Delta T,$$

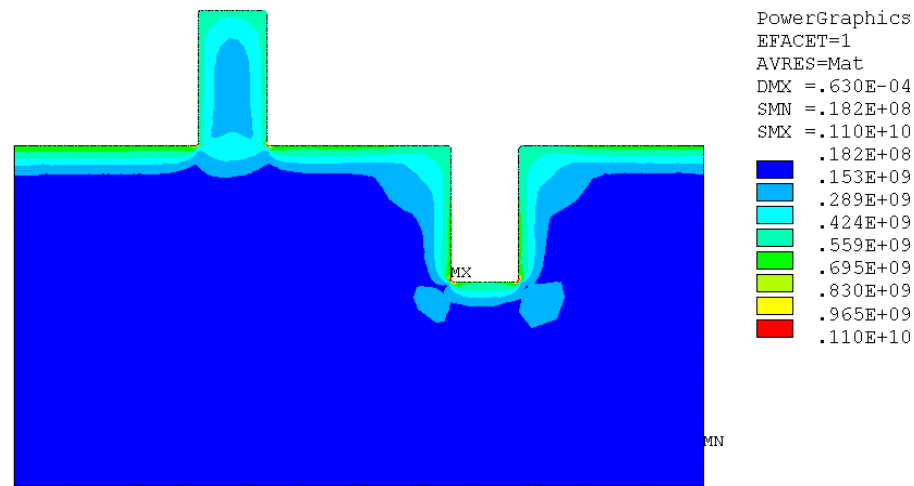
$$\sigma_z = 0.$$

Dla $\Delta T \cong 200\text{C}$ mamy wynik $\sigma_x = \sigma_y = 685\text{MPa}$

$$\bar{q} = -\lambda \text{grad}(T) \quad q = \alpha_k (T_b - T_s)$$



Von Mises (SEQV) i naprężenia główne w karbie A.
Promień karbu $R=0,5$ mm

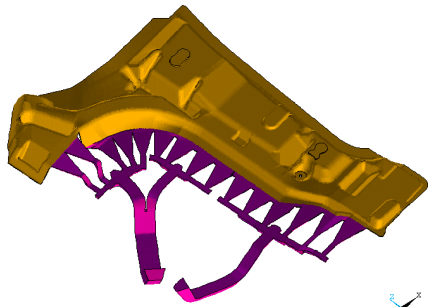


Rozkład naprężeń von Misesa w czasie tx.
Promień karbu $R=0,5$ mm

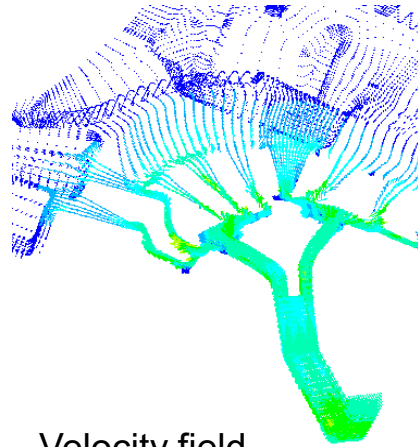
Analiza MES deformacji elementów cienkościennych podczas formowania wtryskowego aluminium

FE analysis of thin-walled elements' deformation during aluminium injection moulding (1998)

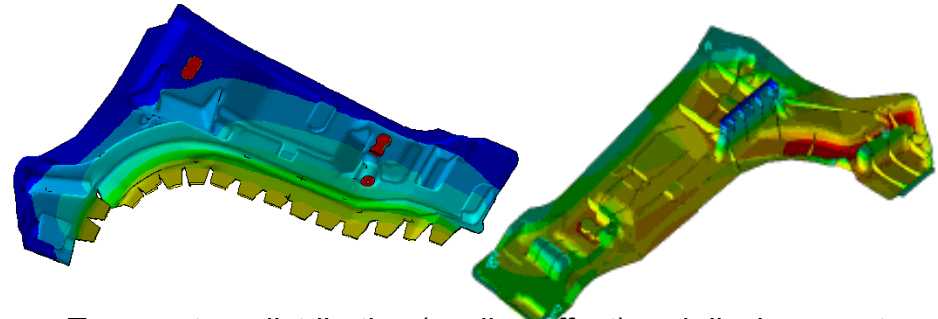
Numerical simulations have been performed to model the process of filling the mould by hot aluminium alloy. The analysis has enabled improvements of the element stiffness diminishing geometrical changes caused by the process. Fluid flow simulation with transient thermal analysis including phase change have been performed, followed by the structural elasto-plastic calculation of residual effects. **The project performed for Alusuisse Technological Center, Sierre, Switzerland**



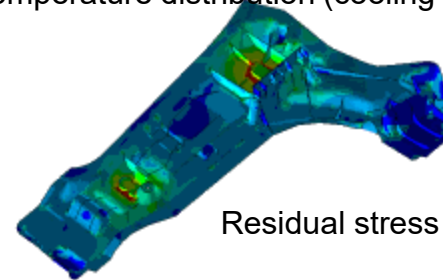
FE model



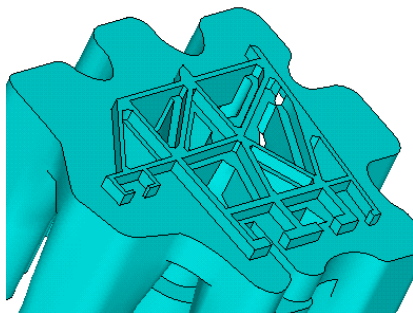
Velocity field during injection



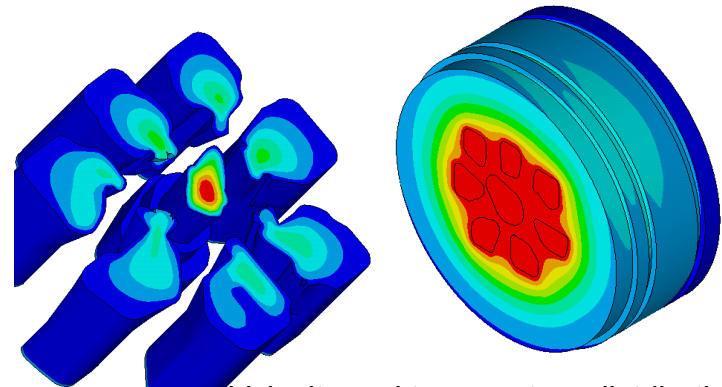
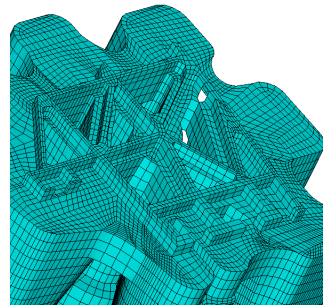
Temperature distribution (cooling effect) and displacements



Residual stress distribution



FE model of the die



Velocity and temperature distribution

Przykład elementu 3-D 20-Node Coupled-Field Solid w programie ANSYS

SOLID226 Element Description

SOLID226 supports the following physics combinations:

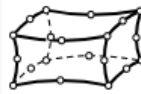
- Structural-Thermal
- Piezoresistive
- Electrostatic-Structural
- Piezoelectric
- **Thermal-Electric**
- Structural-Thermoelectric
- Thermal-Piezoelectric
- Structural-Magnetic
- Structural-Electromagnetic
- Structural-Stranded Coil
- Thermal-Magnetic
- Thermal-Electromagnetic
- Structural-Diffusion
- Thermal-Diffusion
- Electric-Diffusion
- Thermal-Electric-Diffusion
- Structural-Thermal-Diffusion

SOLID227

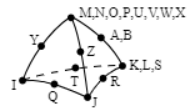
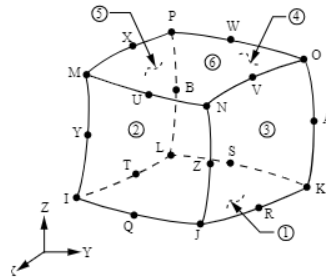
3-D 10-Node Coupled-Field Solid

10 nodes 3-D space

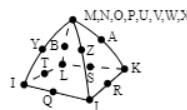
DOF: UX, UY, UZ, TEMP, VOLT, EMF, AZ, CONC



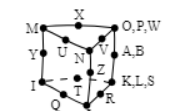
SOLID226 Geometry



Tetrahedral Option



Pyramid Option



Prism Option

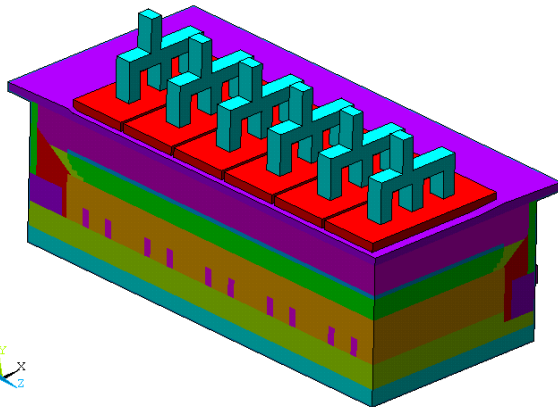
Table 226.1: SOLID226 Field Keys

Field	Field Key	DOF Label	Force Label	Reaction Solution
Structural	1	UX, UY, UZ	FX, FY, FZ	Force
Thermal	10	TEMP	HEAT	Heat Flow
Electric Conduction	100	VOLT	AMPS	Electric Current
Electromagnetic Induction	200	EMF	CURT	Current
Electrostatic	1000	VOLT	CHRG	Electric Charge
Magnetic	10000	AZ	CSGZ	Magnetic Current Segment
Diffusion	100000	CONC	RATE	Diffusion Flow Rate

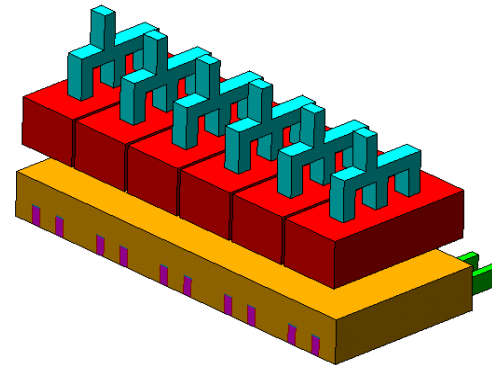
Thermo-electrical analysis of aluminium reduction cells (2001)

The analyses are performed to find temperature field and electrical potential distribution inside the reductant cell used in the process of aluminium production. **The project done for Alusuisse Technological Center, Sierre, Switzerland.**

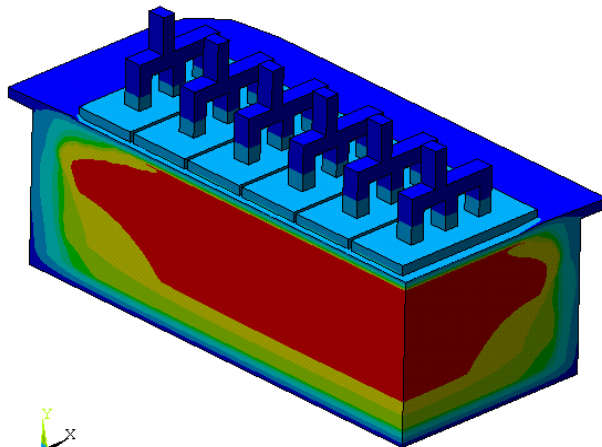
The influence of geometry, material properties and boundary conditions on the phenomena that take place in the bath and liquid aluminium is investigated. The analysis enabled to correct the design and to improve efficiency of the processes.



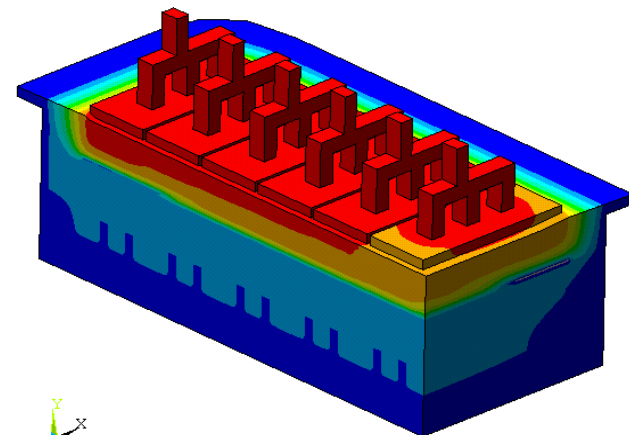
FE model (*quarter of the cell*)



Anode and cathode blocks

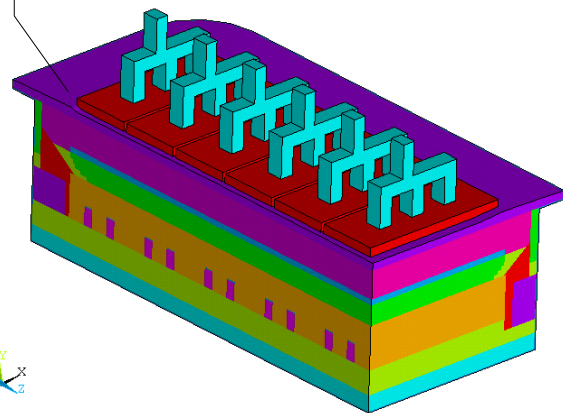


Temperature distribution

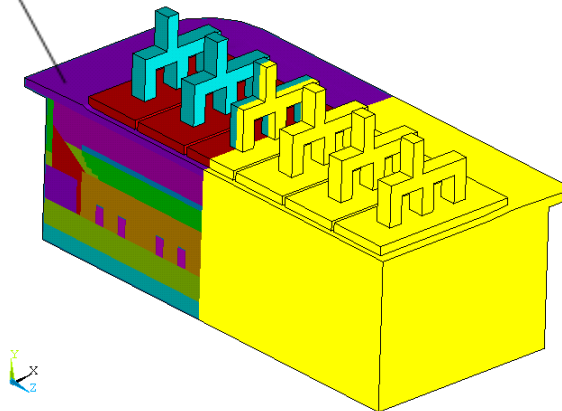


Electric potential distribution

Quarter model

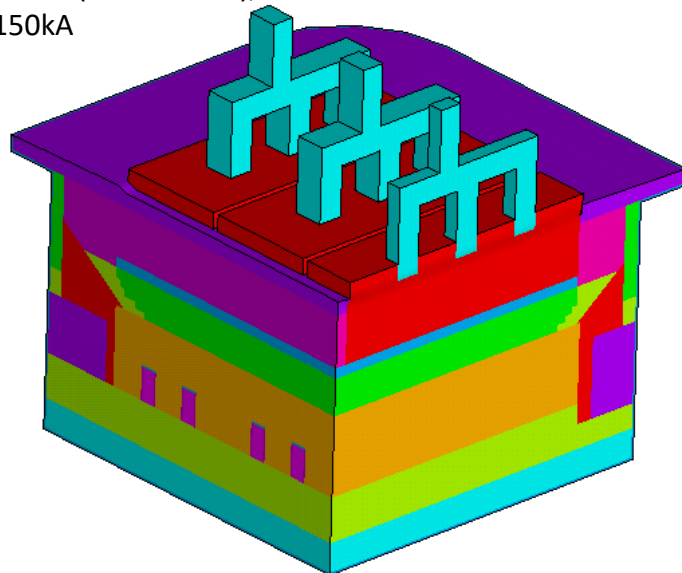


Corner model

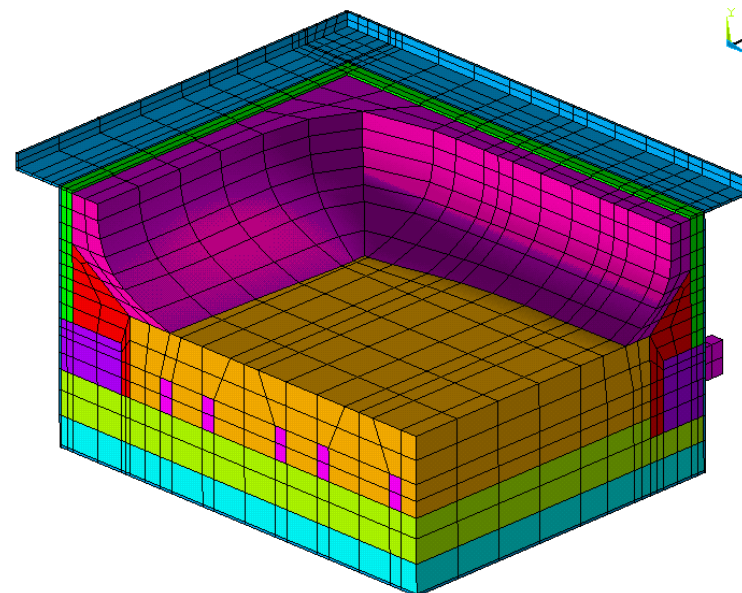


Corner model

- 2850mm cathode blocks,
- 5BN blocks,
- 24 anodes (1.35x0.54m),
- $I_{tot} = 150\text{kA}$

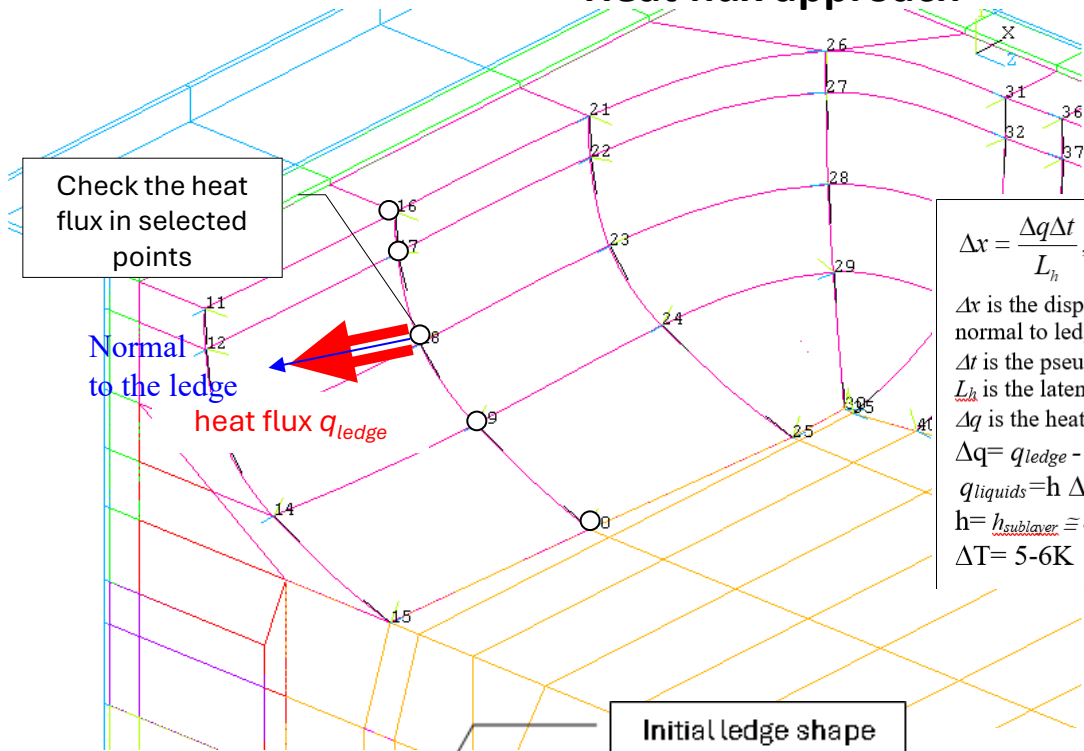


Heat flux approach



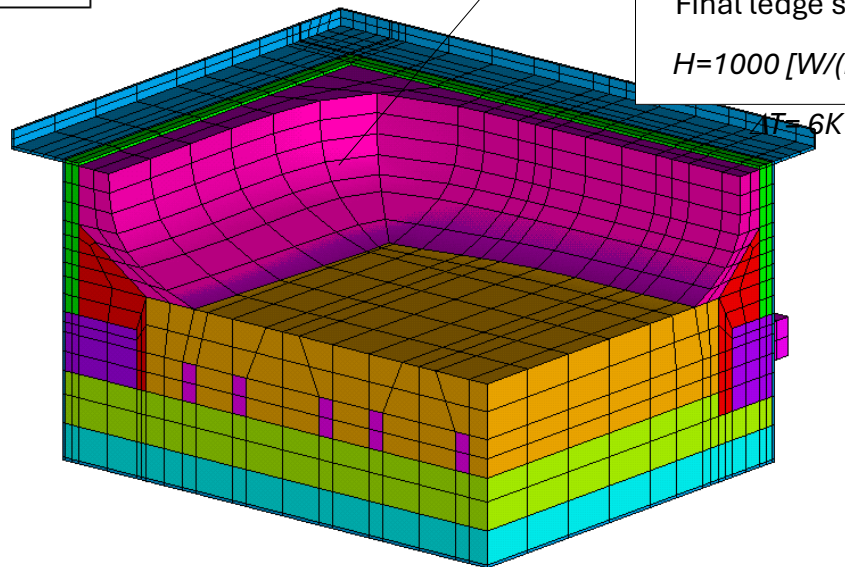
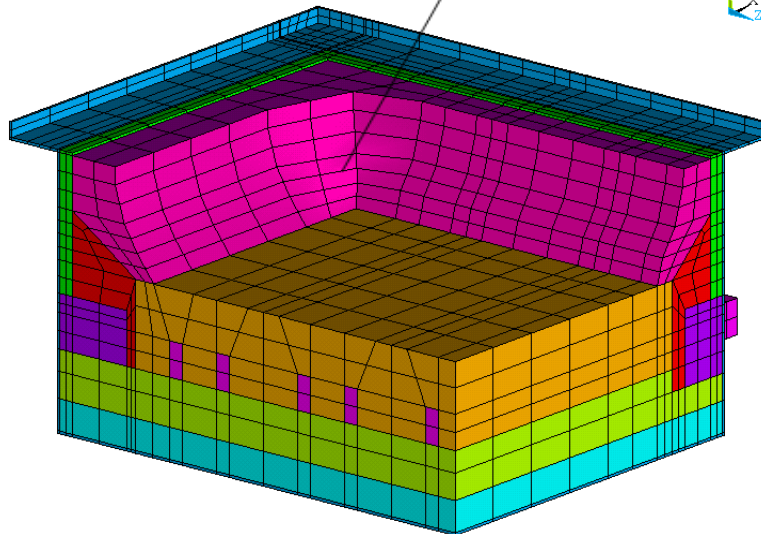
base_corner

Heat flux approach

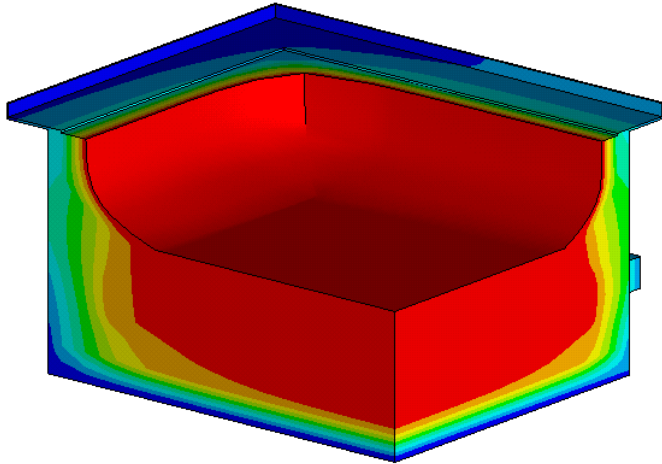


Initial ledge shape

Final ledge shape
 $H = 1000 [W/(m^2K)]$

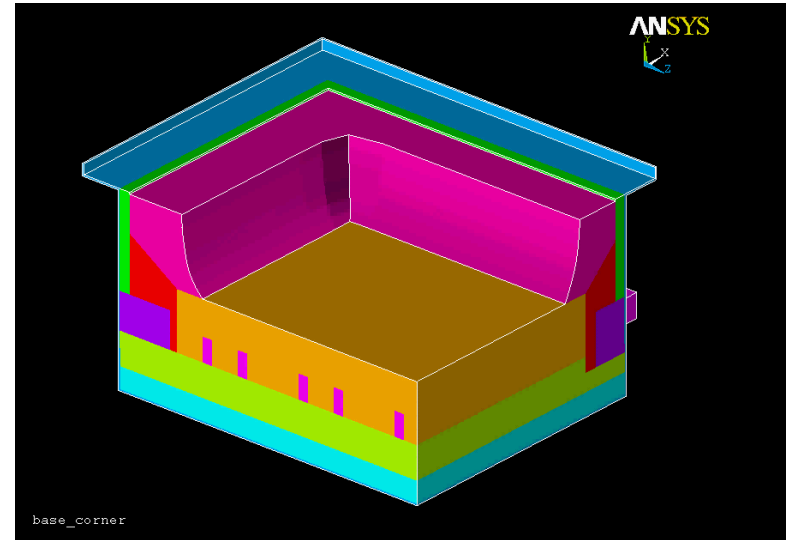


Temperature distribution

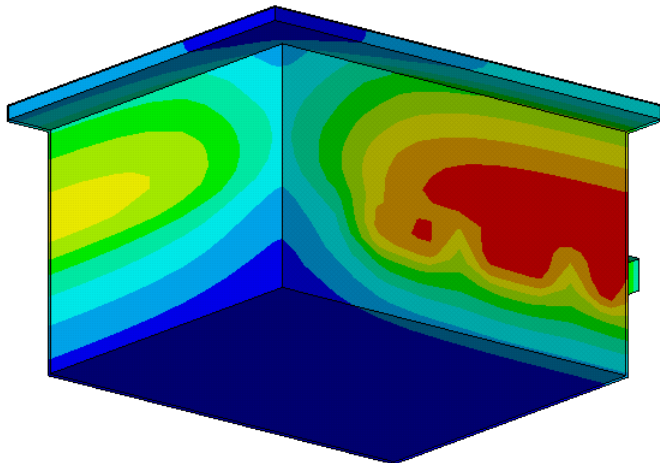


```

SUB =1
TIME=1
TEMP (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
SMN =71.379
SMX =943
71.379
168.225
265.072
361.919
458.766
555.613
652.46
749.306
846.153
943
    
```



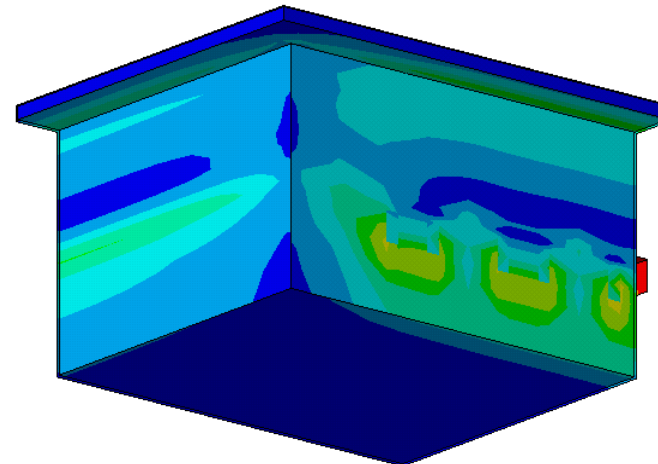
Temperature distribution on the external surfaces



```

STEP=1
SUB =1
TIME=1
TEMP (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
SMN =71.379
SMX =511.202
71.379
120.248
169.117
217.987
266.856
315.725
364.595
413.464
462.333
511.202
    
```

Heat flux distribution on the external surfaces



```

SUB =1
TIME=1
TFSUM (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
SMN =446.528
SMX =101164
446.528
11637
22828
34019
45210
56401
67592
78783
89973
101164
    
```